

Inhaltsverzeichnis

1	Integration	2
1.1	Das unbestimmte Integral	2
1.2	DAS RIEMANN-INTEGRAL	7
1.3	Mehrfachintegrale	18
1.4	Das Lebesguesche Integral	19
1.5	Messbare Funktionen	29
1.6	Das Lebesquesche Integral	35
2	Vektoranalysis	55
2.1	Grundbegriffe	55
2.2	Extremwertbestimmung auf Mannigfaltigkeiten	55
2.3	Der Tangentialraum	59
2.4	Differentialformen	64
2.5	Tensorfelder	71
2.6	$b, \#, d$ und \star	86

1 Integration

1.1 Das unbestimmte Integral

Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall I definierte Funktion. Die Funktion $F(x)$ auf I heißt STAMMFUNKTION von $f(x)$ (auf I), wenn $F(x)$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $c_0 \in \mathfrak{R}$, so ist:

$$(F(x) + c_0)' = F'(x) + (c_0)' = F'(x) = f(x)$$

also $F(x) + c_0$ ebenfalls Stammfunktion.

Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ heißt *unbestimmtes Integral* von $f(x)$ und wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet.

Satz 1

Seien $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$. Dann existiert eine Konstante c , so dass $F_2(x) = F_1(x) + c$ gilt.

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Sei } H(x) &= F_2(x) - F_1(x) \rightarrow H \text{ ist diffbar} \\ \rightarrow H'(x) &= (F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = 0 \\ (\text{Satz 3.5}) &\Rightarrow H(x) \text{ ist konstant, d.h. es ex. ein } c \in \mathfrak{R} \text{ mit} \\ H(x) &\equiv c \Rightarrow F_2(x) - F_1(x) = c \Rightarrow F_2(x) \equiv F_1(x) + c \end{aligned}$$

Sei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$. Dann ergeben sich alle Stammfkt. von $f(x)$ als $F(x) + c$, $c \in \mathfrak{R}$. $\{F(x) + c : c \in \mathfrak{R}\}$ unbestimmtes Integral

Nicht ganz zutreffend schreiben wir:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad c \in \mathfrak{R}$$

Grundintegrale

- $\int 0 dx = c$
- $\int a dx = ax + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

Integrationsregeln

- Linearität

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad a \in \mathfrak{R}, a \neq 0$$

- Partielle Integration

$u(x)$ und $v(x)$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Beweis $uv' = u'v' - u'v \Rightarrow uv' + u'v = (uv)'$ Produktregel

Beispiel gesucht wird $\int \sin^2 x dx$

$$\int \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot \sin x = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

$$v' = \sin x \rightarrow (v = \int \sin x dx = -\cos x + c \quad c \in \mathfrak{R}) \quad v = -\cos x$$

$$u = \sin x \quad u' = \cos x$$

$$\hookrightarrow \int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int (1 - \sin^2 x) dx = \int 1 dx - \int \sin^2 x dx = x - \int \sin^2 x dx$$

$$\hookrightarrow 2 \int \sin^2 x dx = x - \sin x \cdot \cos x + c$$

$$\hookrightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} + c$$

- Partialbruchzerlegung

Sei $f(x)$ eine (gebrochen) rationale Fkt, dann existieren zwei Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ mit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Hat $P(x)$ einen Grad größer oder gleich dem Grad von $Q(x)$, so lässt sich eine Division mit Rest ausführen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{P_0(x)}{Q(x)}$$

wobei $g(x)$ ein Polynom ist und $P_0(x)$ kleineren Grad als $Q(x)$ hat. $g(x)$ lässt sich problemlos unbestimmt integrieren. $Q(x)$ wird zerlegt in lineare und quadratische (irreduzible) Faktoren:

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_j)^{m_j} (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{n_k}$$

$\frac{P_0}{Q}$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{P_0(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{(x - \alpha_1)} + \frac{A_{12}}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m_1}}{(x - \alpha_1)^{m_1}} + \dots + \frac{A_{j1}}{(x - \alpha_j)} + \\ & \frac{A_{j2}}{(x - \alpha_j)^2} + \dots + \frac{A_{jm_j}}{(x - \alpha_j)^{m_j}} + \frac{c_{11}x + b_{11}}{x^2 + P_1x + Q_1} + \dots + \\ & \frac{c_{1n_1}x + b_{1n_1}}{(x^2 + P_1x + Q_1)^{n_1}} + \frac{c_{k1}x + b_{k1}}{(x^2 + P_kx + Q_k)} + \dots + \frac{c_{kn_k}x + b_{kn_k}}{(x^2 + P_kx + Q_k)^{n_k}} \end{aligned}$$

Diese Darstellung ist eindeutig.

Berechnung der Koeffizienten der Partialbruchzerlegung

- Koeffizientenvergleichsmethode
Die Partialbruchdarstellung auf einem gemeinsamen Nenner bringen, dann beim Zähler Polynomzerlegung. . .

Beispiel $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

$q(x) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)$ Grad $p <$ Grad q

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + B}{x^2 + x + 1}$$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^3 + 1 = A_1(x - 1)(x^2 + x + 1) + A_2(x^2 + x + 1) + (Cx + B)(x - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^3 + 1 = & x^3(A_1 + C) + x^2(A_2 + D - 2C) + x(A_2 - 2B + C) \\ & + (-A_1 + A_2 + B) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underbrace{A_1 + C = 1; A_2 + B - 2C = 0; A_2 - 2B + C = 0; -A_1 + A_2 + B = 1}_{A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3}, B = \frac{2}{3}, C = \frac{2}{3}}$$

- Substitutionsmethode
Es werden spezielle Werte für x eingesetzt

Beispiel

$$\frac{x^3 + 1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Cx+B}{x^2+x+1}$$

z.B.

$$\begin{aligned} x=0 & \quad 1 = -A_1 + A_2 + B \\ x=-1 & \quad 0 = \frac{-A_1}{2} + \frac{A_2}{4} - C + B \\ x=2 & \quad \frac{9}{7} = A_1 + A_2 + \frac{2}{7}C + \frac{1}{7}B \\ x=-2 & \quad \frac{-7}{27} = \frac{-A_1}{3} + \frac{A_2}{9} - \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}B \end{aligned}$$

- Grenzwertmethode

Beispiel

$$A_2 = \frac{2}{3}$$

Gleichung mit höher Potenz $(x-\alpha)^k$ multiplizieren und anschließend Grenzwert $x \rightarrow \alpha$ bilden. Die restlichen durch die Substitutionsmethode bestimmen.

Beispiel

$$\frac{x^2 - 5x + 1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$A = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{15}{-15} = -1$$

$$C = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

Integrale der Partialbrüche

1. $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln|x-\alpha| + C$
2. $\int \frac{1}{(x-\alpha)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)} \frac{1}{x-\alpha} + C \quad [n \neq 1]$
3. $\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \ln|x^2+px+q| + C$
4. $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c \quad [4q-p^2 > 0]$
5. $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C \quad [n \neq 1]$
6. $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{1}{(n-1)(4q-p^2)} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2(2n-3)}{(n-1)(4q-p^2)} \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} dx$

• Substitution

$$x = g(t) \quad (\star)$$

wobei $g(t)$ eine differenzierbare, umkehrbare Funktion mit $g'(t) \neq 0$ ist. Anstelle von $f(x)$ wird nun die Funktion $h(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ betrachtet. Sei $H(t)$ eine Stammfunktion von $h(t)$, also $\int h(t)dx = H(t) + c$.

Aus (\star) lässt sich t gewinnen: $t = g^{-1}(t)$

Die Ableitung lautet: $t' = \frac{1}{g'(t)}$

Es ergibt sich:

$$\int f(x)dx = H(g^{-1}(t)) + C$$

Beweis

$$(H(g^{-1}(t)))' = H'(g^{-1}(t)) \cdot g^{-1}(t)' = h(t) \frac{1}{g'(t)} = f(g(t)) = f(x)$$

Beispiele

– $\int \cos(ax + b)dx$

$$t = ax + b, x = \frac{1}{a}(t - b), x' = \frac{1}{a}$$

$$h(t) = \frac{1}{a} \cdot \cos t$$

$$\int \frac{1}{a} \cos t dt = \frac{1}{a} \sin t + c$$

$$\hookrightarrow \int \cos(ax + b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

– $\int \sin^3 x \cos x dx$

$$t = \sin x, x = \arcsin t; x' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$h(t) = t^3(\sqrt{1-t^2})\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = t^3$$

$$\int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + c$$

$$\hookrightarrow \int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + c$$

– sei $f(x = R(\sin x, \cos x))$ eine rationale Funktion in $\sin x$ und $\cos x$

$$t = \tan \frac{x}{2}, x = 2 \arctan t, x' = \frac{2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left[\int \underbrace{R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}_{\text{rationelle Funktion in } t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \right]$$

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

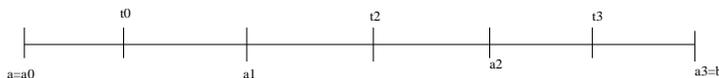
Beispiel $\int \frac{1}{\sin x} dx$

$$\begin{aligned}
&\text{rationelle Funktion } R(z) = \frac{1}{z} & f(x) = R(\sin x) \\
&\text{Substitution: } t = \tan x \frac{x}{2} \\
&\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2t}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c \\
&\hookrightarrow \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \quad [\text{auf } (1, \Pi)]
\end{aligned}$$

1.2 DAS RIEMANN-INTEGRAL

Aufgabenstellung: Ein Fahrzeug fährt entlang einer geraden Straße von Ort A nach Ort B. Die Fahrt beginnt zum Zeitpunkt a und endet in B zum Zeitpunkt b. Wie groß ist die Entfernung von A nach B?

Das Fahrzeug habe zum Zeitpunkt t_1 (zwischen a und b) die Geschwindigkeit v . Näherungsweise setzen wir $s \approx v(t_1)(b - a)$
 Unterteilen der Zeitskala in kurze Abschnitte
 z.B. $a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 = b$



setzen: $s \approx v(t_0)(a_1 - a_0) + v(t_1)(a_2 - a_1) + v(t_2)(a_3 - a_2)$
 t_i beliebig gewählt zwischen a_i und a_{i+1}

Sei eine Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ gegeben. Als *Unterteilung* oder Zerlegung von $[a, b]$ bezeichnen wir jede Folge $\{x_i\}_{i=1 \leq n}$ mit:
 $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$.

$\{\xi_i\}_{i=1 \leq n}$ heißt *Folge von Zwischenpunkten*, wenn $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ für alle $i < n$ gilt. Für eine gegebene Unterteilung $\{x_i\}_{i=1 \leq n}$ und eine gewählte Folge $\xi = \{\xi_i\}_{i=1 \leq n}$ von Zwischenpunkten bilden wir die Summe

$$\sigma(f, z, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$\sigma(f, z, \xi)$ heißt *Riemannsche Zwischensumme*. Die Feinheit $|z|$ einer Unterteilung ist gegeben durch den maximalen Abstand benachbarter Unterteilungspunkte:

$$|z| = \max_{i < n} |x_{i+1} - x_i|$$

Zur Abkürzung schreiben wir auch $\delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Die Unterteilung z heißt δ -fein, wenn $|z| \leq \delta$ gilt.

Eine Riemannsche Zwischensumme $\sigma(f, z, \xi)$ heißt δ -fein, wenn die zugehörigen Zerlegung z δ -fein ist.

Das *Integral von $f(x)$ über $[a, b]$* ist J_0 , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede δ -feine Riemannsche Zwischensumme $\sigma(f, z, \xi)$ gilt.

$$|\sigma(f, z, \xi) - J_0| < \epsilon.$$

Symbolisch: $J_0 = \int_a^b f(x) dx$

$\int_a^b f(x) dx$ heißt auch *Riemann Integral* oder R-Integral von $f(x)$ über $[a, b]$. $f(x)$ heißt (R)-Integrierbar oder (R)-Integrel, wenn das Riemann Integral existiert.

im Beispiel: $s = \int_a^b v(t) dt.$

Satz2

Ist $f(x)$ in $[a, b]$ inegrierbar, so ist $f(x)$ auf $[a, b]$ beschränkt.

Beweis **Annahme:** $f(x)$ ist nicht beschränkt, aber integrierbar.

Ist $\{x_i\}_{i \leq n}$ eine beliebige Unterteilung von $[a, b]$, dann ist $f(x)$ in wenigstens einem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ nicht beschränkt. In diesem Teilintervall finden wir (den Betrag nach) beliebige große Funktionswerte. Zu jeder vorgegebenen Zerlegung lassen sich so beliebig große Zwischensummen bilden, d.h. auch δ -feine Zwischensummen können in beliebiger Größe von J_0 (dem Integral) abweichen. Dann ist aber $f(x)$ nicht integrierbar. **Wid.**

\Rightarrow Annahme ist falsch
 $\Rightarrow f(x)$ ist beschränkt

Bezeichnung

$B[a, b]$ Menge der Funktionen auf $[a, b]$. Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, dann ist $f(x)$ beschränkt. Sei $z = \{x_i\}_{i \leq n}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Da $f(x)$ beschränkt ist, existiert für $i \leq n$

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

bilden:

$$U(f, z) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad \underline{\text{Darboux'sche Untersumme}}$$

$$\theta(f, z) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \quad \underline{\text{Darboux'sche Obersumme}}$$

Offenbar gilt für bel. Riemannsche Zwischensummen $\sigma(f, z, \xi)$

$$U(f, z) \leq \sigma(f, z, \xi) \leq \theta(f, z)$$

Die Unterteilung Z_2 ist eine *Verfeinerung* der Unterteilung Z_1 , wenn jeder Unterteilungspunkt von Z_1 auch ein Unterteilungspunkt von Z_2 ist.

Sei Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 . Dann gilt:

1. $U(f, Z_1) \preceq U(f, Z_2)$
2. $\theta(f, Z_2) \preceq \theta(f, Z_1)$

Seien nun Z_1 und Z_2 beliebige Unterteilungen von $[a, b]$. Dann ist $Z_1 \cup Z_2$ sowohl von Z_1 als auch von Z_2 . Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} U(f, Z_1) &\preceq U(f, Z_1 \cup Z_2) && \text{(wegen 1)} \\ U(f, Z_1 \cup Z_2) &\preceq \theta(f, Z_1 \cup Z_2) \\ \theta(f, Z_1 \cup Z_2) &\preceq \theta(f, Z_2) && \text{(wegen 2)} \end{aligned}$$

also:

3. $U(f, Z_1) \preceq \theta(f, Z_2)$

\Rightarrow Alle Untersummen sind beschränkt nach oben durch alle Obersummen und alle Obersummen sind nach unten beschränkt durch alle Untersummen.

\Rightarrow explizites Supremum bzw. Infimum:

$$\begin{aligned} \underline{D} - \int_a^b f(x) dx &= \sup_z U(f, Z) && \underline{\text{unteres Darboux-Integral}} \\ \overline{D} - \int_a^b f(x) dx &= \inf_z \theta(f, Z) && \overline{\text{oberes Darboux-Integral}} \end{aligned}$$

Riemannsches Integrabilitätskriterium

Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion $f(x)$ ist genau dann R-integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit $\theta(f, Z) - U(f, Z) < \epsilon$ gilt.

(Riemannsches Integrabilitätskriterium) $\Rightarrow f(x)$ ist R-integrierbar gdw.

$$\underline{D} - \int_a^b f(x) dx = \overline{D} - \int_a^b f(x) dx.$$

Beispiele

1. $f(x) = x^2$ (im Intervall $[0, 1]$)

Unterteilung $Z_n = \left\{ \frac{i}{n} \right\}$

$$\theta(f, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2$$

$$U(f, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$\begin{aligned} \theta(f, Z) - U(f, Z) &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} ((n+1)^2 i^2) = \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) = \frac{1}{n^3} \left(2 \sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \right) = \\ &= \frac{1}{n^3} \left(2 \cdot \frac{(n-1)(n)}{2} + n \right) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Nach Riemannschem Kriterium ist die Fkt. integrierbar.
 \Rightarrow R-Integral = D-Integral

$$\begin{aligned} U(f, Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{3}(n^3 - n) - \frac{n(n-1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}n \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ $U(f, Z) \rightarrow \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2. Sei

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rational} \\ 0 & x \text{ irrational} \end{cases}$$

im Intervall $[0, 1]$

Unterteilung $Z = \{x_i\}_{i=0}^n$

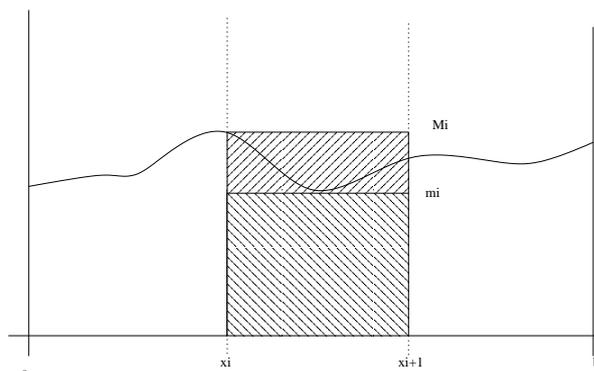
$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \chi(x) = 0$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \chi(x) = 1$$

$$\sigma(\chi, Z) - U(\chi, Z) = \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{M_i - m_i}_{=1} \Delta x = 1$$

(Reimannsches Kriterium) $\Rightarrow \chi(x)$ ist *nicht* R-integrierbar

3. Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige nicht-negative Funktion. Mit 'Fläche unter der Kurve $f(x)$ in $[a, b]$ ' meinen wir die von $f(x)$, der x -Achse und der beiden seitlich begrenzenden Strecken gebildete Fläche. Was ist der Flächeninhalt?



$$m_i = \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

Sei $Z = \{x_i\}_{i \leq n}$ eine Unterteilung von $[a, b]$ und A_i der Flächeninhalt unter der Kurve $f(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$. Offenbar gilt:

$$m_i \Delta x_i \quad \text{Flächeninhalt eines Rechtecks} \quad m_i \Delta x_i \leq A_i$$

$$M_i \Delta x_i \quad \text{Flächeninhalt eines Rechtecks} \quad M_i \Delta x_i \geq A_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} A_i}_{=\text{Flächeninhalt unter d. Kurve}} \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

$$U(f, Z) \leq A \leq O(f, Z)$$

Es ist sinnvoll allgemein $\int_a^b f(x) dx$ als Flächeninhalt unter der Kurve $f(x)$ zwischen a und b festzusetzen. Hat $f(x)$ in $[a, b]$ auch negative Werte, so verstehen wir unter dem Flächeninhalt unter der Kurve in $[a, b]$ den Wert des Integrals $\int_a^b |f(x)| dx$

Integrierbarkeit

1. Jede monotone Funktion ist integrierbar.

Beweis: Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ monoton wachsend. Sei $Z = \{x_i\}_{i \leq n}$ eine δ -feine Unterteilung von $[a, b]$.

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) \\ M_i &= \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) \\ \sigma(f, Z) - U(f, Z) &= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(f(x_{i+1}) - f(x_i))}_{f(b) - f(a)} \\ \sigma(f, Z) - U(f, Z) &\leq \delta (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Wählen $\delta > 0$ so, dass $\delta \cdot (f(b) - f(a)) < \epsilon$ für vorgegebenes $\epsilon > 0$ (Riemannsches K.) $\Rightarrow f(x)$ integrierbar

2. Jede stetige Fkt. ist integrierbar.

Beweis $\Rightarrow f(x)$ ist *gleichmäßig stetig*, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und $\delta > 0$ passend gewählt. Für jede δ -feine Zerlegung $Z = \{x_i\}_{i \leq n}$ gilt dann:

$$\sigma(f, Z) - U(f, Z) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \epsilon \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \epsilon(b - a)$$

(Riemannsches K.) $\Rightarrow f(x)$ integrierbar.

3. Jede stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Beweis den Beweis für (2) leicht modifizieren (den Einfluss der Unstetigkeitsstelle minimieren)

4. Ist $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar, so ist $f(x)$ über jedem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ integrierbar.

Wird andererseits $[a, b]$ von Teilintervallen überdeckt in denen $f(x)$ integrierbar ist, so ist $f(x)$ auch über $[a, b]$ integrierbar.

Für $a < \xi < b$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_\xi^b f(x) dx \quad (\text{Additivität})$$

Vereinbarungen

(a) Für $a > b$ sei $\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$

(b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

Integrationsregeln

$f(x)$ und $g(x)$ seien über $[a, b]$ integrierbar, $c \in \mathfrak{R}$. Dann sind $f(x) + g(x)$, $c \cdot f(x)$ und $|f(x)|$ ebenfalls über $[a, b]$ integrierbar. Es gilt:

1. Linearität

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \quad c \in \mathfrak{R}$$
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Monotonie

Sei $f(x) \leq g(x)$ auf $[a, b]$ dann ist:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3. Dreiecksungleichung

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Beweis Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, $J_0 = \int_a^b f(x)dx$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass für jede δ -feine Zwischensumme σ von $f(x)$ über $[a, b]$ gilt $|J_0 - \sigma| < \epsilon$.

$Z = \{x_i\}_{i \leq n}$ beliebig δ -feine Zerlegung von $[a, b]$

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

(MWS) \Rightarrow ex. $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ mit $\frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = F'(\xi_i) = f(\xi_i)$

$$\Rightarrow F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \delta_0 = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i}_{\delta\text{-feine Zwischensumme}} = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow |J_0 - \delta_0| < \epsilon \rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - (F(b) - F(a)) \right| < \epsilon \quad \text{qed}$$

Bezeichnung: $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$

Beispiel: $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ ist Stammfunktion von $f(x) = x^2$

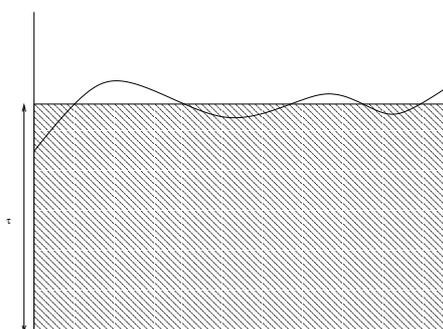
$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f(x)$ über $[a, b]$ integrierbar. Ist m eine untere und M eine obere Schranke für $f(x)$ auf $[a, b]$, dann existiert eine reelle Zahl τ mit $m \leq \tau \leq M$ f.ä. $\frac{1}{b-a}$ die gilt:

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \tau}$$

Für stetiges $f(x)$ ist $\tau = f(\xi)$ für ein $\xi \in [a, b]$.



Beweis: $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$

$$\text{Monotonie} \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{{= \tau \text{ setzen}}} \leq M$$

Wenn $f(x)$ stetig ist, dann können wir m und M als Minimum bzw. Maximum von $f(x)$ annehmen. Als stetige Funktion nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen m und M an, also auch τ , d.h. es ex. ein $\xi \in [a, b]$ mit $\tau = f(\xi)$. \square

Unbestimmtes Integral

Sei nun $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ integrierbar. $\Rightarrow f(x)$ ist auf jeden Teil integrierbar.

bilden: $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b]$ ('unbestimmtes Integral')

1. $\Phi(x)$ ist stetig.

Beweis: $x_0 \in [a, b] \quad x_0 + h \in [a, b]$

$$\Phi(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

f integrierbar $\Rightarrow f$ ist beschränkt

Seien m und M eine untere bzw. obere Schranke von $f(x)$ auf $[a, b]$

$$\text{(MWS)} \Rightarrow \text{ex. } \tau_h[m, M] \text{ mit } \tau_h = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \tau_h \cdot h \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \text{ da } \tau_h \in [m, M]$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0), \text{ d.h. } \phi(x) \text{ ist in } x_0 \text{ stetig } \square$$

2. $f(x)$ sei auf $[a, b]$ stetig. Dann ist $\Phi(x)$ diffbar und es ist $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ für jedes $x_0 \in [a, b]$, also $\Phi(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis:

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right\} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

$$\text{(MWS)} \Rightarrow \text{ex. ein } \xi_h \in [x_0, x_0 + h] \text{ mit } f(\xi_h) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(\xi_h)h \longrightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

Für $h \rightarrow 0$ gilt $\xi_h \rightarrow x_0$ und somit

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = \lim_{\xi_h \rightarrow x_0} f(\xi_h) = f(x_0) \end{aligned}$$

3. Partielle Integration Seien $u(x)$ und $v(x)$ in $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b u \cdot v' dx = u(x) \cdot v(x)|_a^b - \int_a^b u' v dx}$$

Beweis: Da uv' und $u'v$ stetig sind, ex. eine Stammkt $\Phi(x)$ bzw $\Psi(x)$. Für die unbestimmte Integration gilt:

$$\begin{aligned} \int u \cdot v' dx &= uv - \int u' v dx \\ \Rightarrow \Phi(x) &= u(x) \cdot v(x) - \Psi(x) + c \end{aligned}$$

$$\text{(Hauptsatz)} \Rightarrow \int_a^b uv' dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad \int_a^b u' v dx = \Psi(b) - \Psi(a)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b uv' dx &= \Phi|_a^b = u(x)v(x)|_a^b - \Psi(x)|_a^b \\ &= u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u' v dx \quad \square \end{aligned}$$

4. Substitution

- (a) $f(x)$ sei stetig auf $[a, b]$
- (b) $g(t)$ sei stetig diffbar auf $[\alpha, \beta]$
- (c) $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$
- (d) Wertebereich von g sei $[a, b]$

Dann gilt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t)dt}$$

Die Bedingungen (1)–(4) lassen sich variieren:

(1) & (4) können ersetzt werden durch:

(4*) ist bereits dann erfüllt, wenn $g'(x) \neq 0$ auf $[\alpha, \beta]$ gilt.

- (1*) $f(x)$ ist integrierbar
 (4*) $g(t)$ ist monoton wachsend

Beweis: Da $f(x)$ stetig ist, ex. eine Stammfkt $\Phi(x)$ und es ist

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Die Fkt $\Phi(g(t))$ ist auf $[\alpha, \beta]$ differenzierbar:

$$\begin{aligned} (\Phi(g(t)))' &= \Phi'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \\ \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt &= \Phi(g(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)) \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Satz3:

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sei auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent und alle Funktionen $f_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$ seien auf $[a, b]$ stetig. Dann gilt:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Beweis: Untersuche die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ glm. konvergent, $f_n(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$ alle stetig.

\Rightarrow Grenzfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)$ ist stetig

$\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx$ existiert n_0 , so dass $\left| f(x) - \sum_{n=0}^m f_n(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{n=0}^m \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=0}^m f_n(x) \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=0}^m f_n(x) \right| dx$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ wie behauptet \square

Korollar: Jede Potenzreihe kann innerhalb ihres Konvergenzkreises gliedweise integriert werden.

Beweis: Potenzreihen konvergieren innerhalb ihres Konvergenzkreises gleichmäßig. Alle Partialsummen sind Polynome und damit stetig \square

Beispiel: $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) dx$ für $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+t} &= \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \text{ für } |t| < 1 \text{ geometrische Reihe} \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \\ \Rightarrow \ln(1+t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \end{aligned}$$

1.3 Mehrfachintegrale

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \\ [a, b] & \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \xi \in [a, b] &\Leftrightarrow \bar{a} \leq \xi \leq \bar{b} \Leftrightarrow a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq \xi_n \leq b_n \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ sei auf $[\bar{a}, \bar{b}]$ definiert. ($x = (x_1, \dots, x_n)$ oder $\chi = (x_1, \dots, x_n)$)

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (\bar{a}, \bar{b})$

$$\varphi_i(t) = f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, t, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\varphi_i(t)$ ist jeweils im Intervall $[a_i, b_i]$ definiert und kann auf Integrierbarkeit untersucht werden.

$$\text{bilen: } \int_{a_i}^{b_i} \varphi_i(t) dt = \int_{a_i}^{b_i} f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, t, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n) dt \quad (\star)$$

Die auf der rechten Seite von (\star) auftretenden Konstanten $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n$ werden als Parameter bezeichnet.

$$\int_{a_i}^{b_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_i$$

heißt *parameterunabhängiges* Integral oder einfach *Parameterintegral*.

(Für die Variablen x_1, \dots, x_n werden entsprechende Werte ξ_1, \dots, ξ_n eingesetzt.)

Wenn bei jeder Einsetzung das Integral (\star) existiert, dann wird dadurch eine von $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n$ abhängige Funktion definiert:

$$F_i(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

Beispiel: $F(x, y, z) = xy + x^2 z^2$ ist auf jedem Intervall definiert und stetig.

z.B. $\bar{a} = (0, 0, 1)$ und $\bar{b} = (1, 2, 4)$

$$F_1(y, z) = \int_0^1 (xy + x^2 z^2) dx = \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{3} x^3 z^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} y + \frac{1}{3} z^2$$

$$F_2(x, z) = \int_0^2 (xy + x^2 z^2) dy = x \frac{1}{2} y^2 + x^2 z^2 y \Big|_0^2 = 2x + 2x^2 z^2$$

$$F_3(x, y) = \int_1^4 (xy + x^2 z^2) dz = xyz + \frac{1}{3} x^2 z^3 \Big|_1^4 = 3xy + 21x^2$$

$$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad \bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \quad \bar{a} < \bar{b}$$

$$\nu_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad \varsigma_i(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

Satz4:

$f(x)$ sei im Intervall $[\bar{a}, \bar{b}]$ stetig. Dann ist für jedes $1 \leq i \leq n$ das

$$\text{Parameterintegral } F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \int_{a_i}^{b_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

in $[a_i, b_i]$ stetig

Seien x_{i_1}, \dots, x_{i_k} paarweise verschiedene Variablen. Wir setzen:

$$\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \dots \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} f(x_1 \dots x_n) dx_{i_k} \dots dx_{i_1} := \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left\{ \dots \left\{ \int_{a_{i_k}}^{b_{i_k}} f(x_1 \dots x_n) dx_{i_k} \right\} \dots \right\} dx_{i_1}$$

Und bezeichnen ein derartiges Integral als *iteriertes Integral* oder *Mehrfachintegral*. Insbesondere heißt ein zweifaches Integral auch *Doppelintegral*

1.4 Das Lebesguesche Integral

$$R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Gerechnet wird mit diesen Symbolen wie üblich:

$$\text{z.B. } a + \infty = +\infty \quad a \in R$$



nicht sinnvoll: $\frac{a}{0}, \frac{\pm\infty}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, +\infty - (+\infty), \infty + (-\infty)$



$0 \cdot (\pm\infty) = 0$ (im Gegensatz zur Verwendung bei unbest. Grenzwerten)

$$-\infty \leq a \leq +\infty \text{ für } a \in R$$

Eine Funktion mit Werten in R^* heißt *numerische Funktion*.

Sein $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern $a_i \geq 0, A_i \in R^*$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \begin{cases} +\infty & \text{falls ein } a_i = +\infty \\ +\infty & \text{falls } \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \right\} \text{ nicht beschränkt ist} \\ < \infty & \text{falls } \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \right\} \text{ beschränkt ist} \end{cases}$$



$$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n \quad \bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad \bar{b} = (b_1, \dots, b_n), \quad \bar{a} \leq \bar{b}$$

Wir betrachten halboffene Intervalle $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{a} \leq x < \bar{b}\}$ wobei $\bar{a} \leq x < \bar{b}$ bedeutet: $a_1 \leq x_1 < b_1, \dots, a_n \leq x_n < b_n$
 J_n sei die Menge der halboffenen Intervalle des \mathbb{R}^n .

Satz5:

Das System J_n der Intervalle hat folgende Eigenschaften:

- (1) $\emptyset \in J_n$
- (2) $A, B \in J_n$ und $A \leq B$

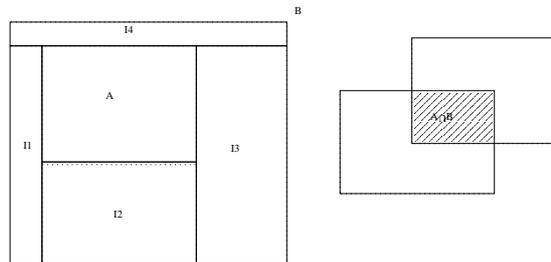
Dann ex. paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_m \in J_n$

(d.h. $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$) mit $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^m I_i$

- (3) $A, B \in J_n \Rightarrow A \cap B \in J_n$
-

Beweis: anschaulich plausibel

$$n = 2$$



$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^4 I_i$$

Satz6:

Jede offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich darstellen in der Form

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ mit } I_i \in \mathcal{J}; I_i \cap I_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \quad (2)$$

Ohne Beweis! Für Intervalle $I \in \mathcal{J}$ setzen wir

$$m(I) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } I = \emptyset \\ (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n) & \text{wenn } I[\bar{a}, \bar{b}] \neq \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

$m(I)$ heißt *Inhalt des Intervalls*. Wir erhalten so eine Funktion $m : \mathcal{J} \rightarrow [0, \infty)$, die auch in höheren Dimensionen für Intervalle das 'Volumen', jetzt Inhalt genannt, angibt.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine bel. Teilmenge und $\{I_i\}$ eine Folge von Intervallen, die M überdeckt, d.h. $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.

Falls M überhaupt so etwas wie einen Inhalt hat, müsste er sicherlich kleiner oder gleich $\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$ sein.

Die Menge aller möglichen Überdeckungen von M mit Intervallen bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(M)$.

Für bel. Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ setzen wir nun

$$\bar{\mu}(M) = \inf_{\mathcal{U}(M)} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \quad (2)$$

äußeres Lebesguesches Maß von M

Für den Spezialfall $M = I$ (ein Intervall) gilt bei bel. Überdeckungen $\{I_i : i = 1, 2, \dots\}$ von M

$$m(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \quad (3)$$

(anschaulich plausibel)

Folglich: $m(I) \leq \inf_{\mathcal{U}(M)} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$

Andererseits ist $\{I\}$ eine Überdeckung von I , folgt

$$\inf_{\check{U}(M)} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq m(I)$$

also:

$$m(I) = \inf_{\check{U}(M)} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) = \bar{\mu}(I) \quad (4)$$

Bemerkungen:

1. $\bar{\mu}(m)$ ist für jedes $M \subseteq R^n$ definiert ($\check{U}(M)$ ist nicht leer, inf ex.)

Nach Def. des Infimums gilt:

2. Für jede $\{I_i\} \in \check{U}(M)$ ist

$$\bar{\mu}(M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \quad (5)$$

3. Zu jedem $\epsilon > 0$ ex. eine Überdeckung $\{I - i\} \in \check{U}(M)$ mit

$$\bar{\mu}(M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq \mu(\bar{\mu}) + \epsilon \quad (6)$$

Eigenschaften von $\bar{\mu}$

1. $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq \bar{\mu}(M) \leq +\infty$ für alle $M \subseteq R^n$
3. (Monotonie) $M_1, M_2 \subseteq R^n$
 $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \bar{\mu}(M_1) \leq \bar{\mu}(M_2)$
4. (Subadditivität) $M_1, M_2 \subseteq R^n$
 $\bar{\mu}(M_1 \cup M_2) \leq \bar{\mu}(M_1) + \bar{\mu}(M_2)$
5. $M_1, M_2 \dots \subseteq R^n$ (δ -subadditiv)
 $\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(M_i)$

Beweis:

$$\text{ad (3) } M_1 \leq M_2 \Rightarrow \ddot{U}(M_2) \leq \ddot{U}(M_1)$$

$$\Rightarrow \inf_{\ddot{U}(M_1)} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq \inf_{\ddot{U}(M_2)} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

$\bar{\mu}(M_1) \leq \bar{\mu}(M_2)$ d.h. (3) gilt.

(4) folgt sofort aus (5)

$$\text{ad(5) } M_1, M_2, \dots \text{ beliebig, } M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Es ex. Überdeckung $\{I_{ij}\}_{j=1,2,\dots} \in \ddot{U}(M_i)$

$$\text{mit } \sum_{j=1}^{\infty} m(I_{ij}) \leq \bar{\mu}(M_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \quad (\text{wegen Gl.(7)})$$

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij} \quad M_1 \leq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{1j}$$

$$\Rightarrow \{I_{ij}\}_{i=1,2,\dots,j=1,2,\dots} \in \ddot{U}(M)$$

$$\Rightarrow \bar{\mu} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(I_{ij})}_{\leq \bar{\mu}(M_i) + \frac{\epsilon}{2^i}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(M_i) + \underbrace{\epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i}_{=1}$$

$$\Rightarrow \bar{\mu}(M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(M_i) + \epsilon$$

$$\epsilon \text{ beliebig} \Rightarrow \bar{\mu}(M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(M_i) \quad \square$$

allgemein gilt:

$$\bar{\mu}(M_1 \cup M_2) \leq \bar{\mu}(M_1) + \bar{\mu}(M_2)$$

Es sollte sein: $M_1 \cap M_2 = \emptyset$
 $\Rightarrow \bar{\mu}(M_1 \cup M_2) = \bar{\mu}(M_1) + \bar{\mu}(M_2)$ gilt aber nicht!!

Definition $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-Messbar* (kurz: messbar), wenn für beliebige Intervalle $Q \in J$ gilt:

$$\bar{\mu}(Q \cap M) + \bar{\mu}(Q \setminus M) = \bar{\mu}(Q) \quad (7)$$

m sei die Menge aller Lebesque-messbarer Mengen. Für $M \in m$ heißt

$$\mu(M) := \bar{\mu}(M) \tag{8}$$

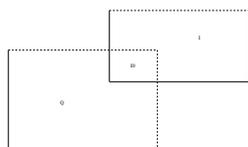
Lebesquesches Maß von M

Gegeben sei ein beliebiges Intervall $I \in J$. Nun seien I_1, \dots, I_k paarweise disjunkte Teil-Intervalle von I .

anschaulich ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^k m(I_i) \leq m(I) \tag{9}$$

Sei Q ein weiteres Intervall, $Q \in J$



$$\begin{aligned} I_0 &= Q \cap I \\ Q &= I_0 \cup (Q \setminus I_0) \end{aligned}$$

$$\text{(subadditivität)} \Rightarrow \bar{\mu}(Q) \leq \bar{\mu}(I_0) + \bar{\mu}(Q \setminus I_0) \tag{10}$$

Satt5(2):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ex. } I_1, \dots, I_m \text{ paarweise diskunkt mit } \bigcup_{i=1}^m I_i &= Q \setminus I_0 \\ \Rightarrow Q &= \bigcup_{i=0}^m I_i \quad I_0, \dots, I_m \text{ paarweise disjunkt.} \end{aligned}$$

$$\text{(wegen (10))} \Rightarrow \sum_{i=0}^m m(I_i) \leq m(Q) \tag{11}$$

$$\text{somit: } \bar{\mu}(I_0) + \bar{\mu}(Q \setminus I_0) = \bar{\mu}(I_0) + \bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^m I_i\right) \leq \sum_{i=0}^m \bar{\mu}(I_i) \text{ (subadditiv)}$$

Für Intervalle ist $\bar{\mu}(I_i) = m(I_i) \quad i = 0, \dots, m$

$$\Rightarrow \bar{\mu}(I_0) + \bar{\mu}(Q \setminus I_0) \leq \sum_{i=0}^m m(I_i) \leq m(Q) = \bar{\mu}(Q) \tag{12}$$

$$(11) + (13) \Rightarrow \bar{\mu}(Q \cap I_0) + \bar{\mu}(Q \setminus I_0) = \bar{\mu}(Q) \text{ für alle } Q \in J \quad (13)$$

d.h. I zerlegt jedes Intervall Q so, dass sich die Maßzahlen genau zum Inhalt von Q addieren.

Wegen (14) ist jedes Intervall I Lebesgue-messbar und es ist

$$\mu(I) = \bar{\mu}(I) = m(I) \quad (14)$$

Damit haben wir eine Mengenfunktion $\mu : m \rightarrow [0, \infty]$ definiert, die Fortsetzung von $m : J \subseteq m \rightarrow [0, \infty)$ ist, $\mu(I) = m(I)$, $I \in J$

Eigenschaften des Mengensystems m

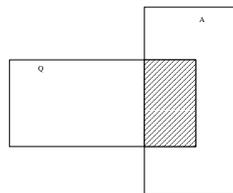
1. $\emptyset \in m$
2. $M \in m \Rightarrow R^n \setminus M \in m$
3. $M_1, M_2, \dots \in m \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in m$

Ein Mengensystem m mit den Eigenschaften (1)–(3) heißt δ -Algebra

Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes

<ol style="list-style-type: none"> (1) $\mu(\emptyset) = 0$ (2) $M \in m \Rightarrow 0 \leq \mu(M) \leq +\infty$ (3) $M_1, M_2, \dots \in m$ paarweise disjunkt $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i) \quad (\delta\text{-additiv})$

Eine Fkt μ auf einer δ -Algebra mit den Eigenschaften (1)–(3) heißt *Maß*.



m δ -Algebra:

1. $\emptyset \in m$
2. $M \in m \Rightarrow R^n \setminus M \in m$
3. $M_1, M_2, \dots \in m \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in m$

Maß μ auf m :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $M \in m \Rightarrow 0 \leq \mu(M) \leq +\infty$
3. $M_1, M_2, \dots \in m$ paarweise disjunkt: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i)$ (δ -additiv)
O.B.

Weitere Eigenschaften

4. $R^n \in m$
5. $M_1, M_2, \dots \in m \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i \in m$
6. $M_1, M_2 \in m \Rightarrow M_1 \setminus M_2 \in m$

Beweis: ad (4) $R^n = R^n \setminus \emptyset$

ad (5) $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = R^n \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (R^n \setminus M_i)\right)$

ad (6) $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap (R^n \setminus M_2)$

(7) $M_1, M_2 \in m$ $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mu(M_1) \leq \mu(M_2)$ (monoton)

(8) $M_1, M_2 \in m$ $M_1 \subseteq M_2, \mu(M_2) \leq \infty \Rightarrow \mu(M_2 \setminus M_1) = \mu(M_2) - \mu(M_1)$

(9) $M_1, M_2, \dots \in m \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i)$ (δ -subadditiv)

(10) $M_1, M_2, \dots \in m, M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(M_i)$$

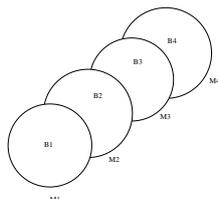
(7)+(9) folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des äußeren Maßes.

ad (8) $M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$

Da $M_1 \cap (M_2 \setminus M_1) = \emptyset$ ist, gilt $\mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1)$

$$\Rightarrow \mu(M_2 \setminus M_1) = \mu(M_2) - \mu(M_1)$$

ad (10) $B_1 = M_1$



$B_i = M_i \setminus M_{i-1}$ $B_i \in m$ paarweise disjunkt

$$\begin{aligned}
 M_m &= \bigcup_{i=1}^m M_i = \bigcup_{i=1}^m B_i \\
 \rightarrow M &= \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \\
 \Rightarrow \mu(M) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^m \mu(B_i)}_{=\mu\left(\bigcup_{i=1}^m B_i\right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(M_m) \quad \square
 \end{aligned}$$

Eine Menge $N \subseteq R^n$ heißt *Nullmenge* wenn $\bar{\mu}(N) = 0$ ist.

Satz7

-
- (I) Jede Nullmenge $N \subseteq R^n$ ist Lebesgue-messbar und $\mu(N) = 0$
 - (II) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist wieder eine Nullmenge
 - (III) Sei M Lebesgue-messbar und N eine Nullmenge dann ist:
 $\mu(M \cup N) = \mu(M)$
-

Beweis: ad (I): Sei Q eine bel. Teilmenge $Q = (Q \cap N) \cup (Q \setminus (Q \cap N))$

$Q \cap N \leq N$ und $Q \setminus (Q \cap N) \leq Q$

$$\bar{\mu}(Q) \leq \bar{\mu}(Q \cap N) + \bar{\mu}(Q \setminus (Q \cap N)) \leq \bar{\mu}(M) + \bar{\mu}(Q) = \bar{\mu}(Q)$$

$\Rightarrow \bar{\mu}(Q) = \bar{\mu}(Q \cap N) + \bar{\mu}(Q \setminus (Q \cap N))$ für alle Q

$\Rightarrow N \in m$ und $\mu(N) = \bar{\mu}(N) = 0$

ad (II): N Nullmenge, $N_1 \leq N$

$$0 \leq \bar{\mu}(N_1) \leq \bar{\mu}(N) = 0 \Rightarrow \bar{\mu}(N_1) = 0 \text{ also } N_1 \text{ Nullmenge}$$

ad (III): $M, N \in m$, $\mu(N) = 0$

$$M \leq M \cup N \Rightarrow \mu(M) \leq \mu(M \cup N) \leq \mu(M) + \mu(N) = \mu(M)$$

$\Rightarrow \mu(M) = \mu(M \cup N)$ \square

Beispiele:

1. $M = \{P_0\}$, $P_0 \in R^n$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, $\bar{\epsilon} = (\epsilon, \epsilon, \dots)$ $I_\epsilon = (P_0, P_0 + \bar{\epsilon})$

$$\bar{\mu}(M) \leq \bar{\mu}(I_\epsilon) = \epsilon^n \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \bar{\mu}(M) = 0$$

$\Rightarrow M$ ist Nullmenge

2. Jede endliche und abzählbare Menge ist eine Nullmenge

3. Jede $(n - 1)$ -dim. Hyperebene ist eine Nullmenge

4. Jede Teilmenge einer Hyperebene ist eine Nullmenge

5. $I_1 = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ offenes Intervall

$I_2 = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ abgesch. Intervall

$I = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$

$I_1 = I \setminus \partial I$

$I_2 = I \cup \partial I$

∂I ist Nullmenge (wegen (4))

$\Rightarrow I_1$ und I_2 sind meßbar und $\mu(I_1) = \mu(I_2) = \mu(I)$

Satz8

(I) Jede offene Menge $M \subseteq R^n$ ist messbar

(II) Jede abgeschlossene Menge $M \subseteq R^n$ ist messbar

(III) Der Rand ∂M jeder Menge $M \subseteq R^n$ ist messbar

Beweis: ad (I) M offen $\Rightarrow M = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

I_i paarweise disjunkte Intervalle (Satz6)

ad (II) M abgeschlossen $\Leftrightarrow R^n \setminus M$ offen

ad (III) ∂M immer abgeschlossen

Satz9

-
- (I) Jede Riemann-messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesque-messbar und ihr Riemannsches Inhalt stimmt mit ihrem Lebesqueschen Maß überein.
- (II) Eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Riemann-messbar, wenn $\mu(\partial M) = 0$.
-

O.B.

Bemerkung:

1. $n = 1$ $M_0 = \{x \in [0, 1] : x \text{ rational}\}$
 $M_1 = \{x \in [0, 1] : x \text{ irrational}\}$
 $M_0 \cup M_1 = [0, 1]$ $M_0 \cap M_1 = \emptyset$
 M_0 ist abzählbar $\rightarrow M_0$ ist Lebesque-messbar $\mu(M_0) = 0$
 $\Rightarrow \mu(M_1) = 1$
 M_0 und M_1 sind nicht Riemann-messbar.
2. Es existieren Mengen, die nicht Lebesque-messbar sind.

1.5 Messbare Funktionen

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine auf M gegebene numerische Funktion.

Für jede reelle Zahl a sei

$$\{f > a\} = \{x \in M : f(x) > a\}$$

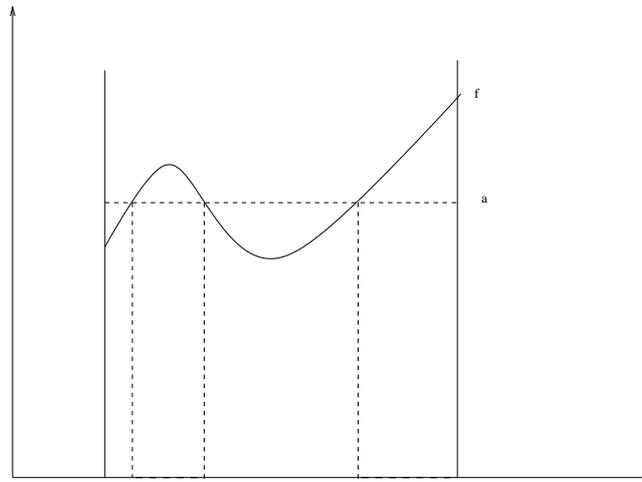
analog:

$$\{f \geq a\} = \{x \in M : f(x) \geq a\}$$

$$\{f < a\} = \dots$$

$$\{f \leq a\} = \dots$$

$f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ heißt *messbar* (genauer: Lebesque-messbar, L-messbar), wenn sowohl M als auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f > a\}$ messbar sind.



Satz10

Sei $f : M \rightarrow R^*$ messbar. Dann sind für jedes $a \in R$ die Mengen $\{f \leq a\}, \{f \geq a\}, \{f < a\}, \{f = a\}, \{f \neq a\}$ messbar

Beweis:

$$\{f \geq a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{f > a - \frac{1}{m}\} \quad f(x) > a - \frac{1}{m}$$

$$\{f < a\} = M \setminus \{f \geq a\}$$

$$\{f \leq a\} = M \setminus \{f > a\}$$

$$\{f = a\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq a\}$$

$$\{f \neq a\} = M \setminus \{f = a\} \quad \square$$

Gegeben sei die Funktion $F : M \rightarrow R^*$ und $a \in R$. $f|_A$ sei die Einschränkung von f auf A .

Satz11

Sind f und A messbar, so ist auch $f|_A$ messbar.

Beweis $\{f|_A > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} = \{f > a\} \cap A$

Satz12

Sei $f : M \rightarrow R^*$ und $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Ist $f|_{A_i}$ für jedes i messbar, dann ist auch f messbar.

Beweis: $\{f > A\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{f|_{A_i} > A\}$ \square

Satz13

$f, g : M \rightarrow R^*$ seien messbar. Dann sind auch messbar:

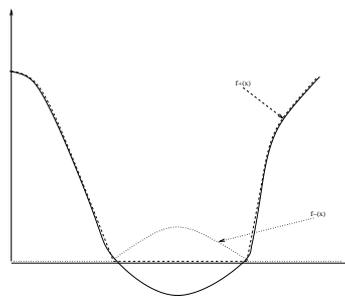
- (1) $c \cdot f, \quad c \in R$
 - (2) $f + g$ (falls für kein $x \in M$ $f(x) = +\infty \wedge g(x) = -\infty$
oder $f(x) = -\infty \wedge g(x) = +\infty$)
 - (3) $f \cdot g$
 - (4) $\frac{f}{g}$ (falls für kein $x \in M$ $g(x) = 0$ oder $f(x) = \pm\infty \wedge g(x) = \pm\infty$)
-

Sei $f : M \rightarrow R^*$ gegeben

Dann setzen wir:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\} \text{ Positivteil von } f \\ f^-(x) &= \min\{f(x), 0\} \text{ Negativteil von } f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^+(x) &\geq 0 & f^-(x) &\leq 0 \\ f(x) &= f^+(x) - f^-(x) \\ |f(x)| &= f^+(x) + f^-(x) \end{aligned}$$



Bzgl. messbarkeit gilt:

1. f ist messbar $\Leftrightarrow f^+$ und f^- sind messbar
2. Ist f messbar, so ist $|f|$ messbar

Satz14

Sei $M, M \subseteq R^n$ messbar und $f : M \rightarrow R$ stetig.
Dann ist f messbar.

Beweis: Aus der Stetigkeit folgt:

$f^{-1}((a, \infty))$ ist für jedes $a \in R$ in M offen. d.h. es ex. eine offene Menge $X_a \subseteq R^n$, so dass $f^{-1}((a, \infty)) = M \cap X_a \Rightarrow \{f > a\} = M \cap X_a$ messbar für jedes $a \in R$ \square

Zwei Funktionen $f, g : M \rightarrow R^*$ heißen *fast überall gleich*, $f \stackrel{f\ddot{u}}{=} g$ wenn $\{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Sei f messbar und $g \stackrel{f\ddot{u}}{=} f$.

Bilden: $M_0 = \{x \in M : f(x) \neq g(x)\}$ und $M_1 = \{x \in M : f(x) = g(x)\}$

$\Rightarrow M_0 \cap M_1 = \emptyset$ und $M_0 \cup M_1 = M$

Für $a \in R$ ist $\{g > a\} = (\underbrace{\{g > a\} \cap M_0}_{\subseteq M_0}) \cup (\underbrace{\{g > a\} \cap M_1}_{=\{f > a\} \cap M_1})$ messbar.

$\Rightarrow g$ ist messbar

Bemerkung: $\stackrel{f\ddot{u}}{=}$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt

1. $f \stackrel{f\ddot{u}}{=} f$
2. $f \stackrel{f\ddot{u}}{=} g \Rightarrow g \stackrel{f\ddot{u}}{=} f$
3. $f \stackrel{f\ddot{u}}{=} g$ und $g \stackrel{f\ddot{u}}{=} h \Rightarrow f \stackrel{f\ddot{u}}{=} h$

Gegeben seien Funktionen $f_\nu : M \rightarrow R^*$ $\nu = 1, 2, 3, \dots$ und eine Funktion $f : M \rightarrow R^*$. Die Folge (f_ν) *konvergiert fast überall gegen f* , symb. $f_\nu \xrightarrow{f\ddot{u}} f$, wenn sie für fast alle $x \in M$ $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$ gilt, d.h. die Menge der Elemente $x \in M$, für die $(f_\nu(x))$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert, ist eine Nullmenge.

Satz 15

Sei $(f_\nu)_{\nu \in N}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf M .

Dann sind die Funktionen $\sup_{\nu \in N} f_\nu$ und $\inf_{\nu \in N} f_\nu$ messbar.

Beweis: Sei $a \in R$ beliebig. Für $x \in M$ gilt:

$\sup_{\nu \in N} f_\nu \leq a \Leftrightarrow$ für alle $\nu = 1, 2, 3, \dots$ $f_\nu(x) \leq a$

$\rightarrow \{\sup_{\nu \in N} f_\nu \leq a\} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \{f_\nu \leq a\}$

$\Rightarrow \{\sup_{\nu \in N} f_\nu > a\} = M \setminus \{\sup_{\nu \in N} f_\nu \leq a\}$

$\sup_{\nu \in \mathbb{N}} f_\nu$ ist messbar

Es ist $\inf_{\nu \in \mathbb{N}} f_\nu = - \sup_{\nu \in \mathbb{N}} (-f_\nu) \rightarrow$ messbar

Korollar: Sei $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen auf M . Konvergiert (f_ν) fast überall gegen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^*$, dann ist f ebenfalls messbar.

Beweis: Es ist: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} f_m(x)$

(Satz15) $\Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x)$ messbar

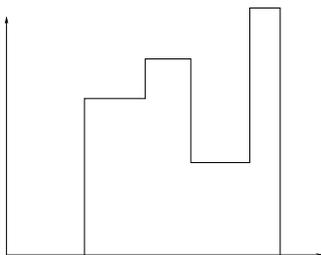
$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) \stackrel{\text{f\"u}}{=} f(x) \rightarrow f(x)$ messbar
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\chi_A(x) \geq \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

χ heisst *charakteristische Funktion* von A .
Dann: χ_A messbar $\Leftrightarrow A$ messbar

Beweis: $a \in \mathbb{R}$

$$\{\chi_a > a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } a \geq 1 \\ A & 0 \leq a < 1 \\ \mathbb{R}^n & a < 0 \end{cases} \rightarrow \text{Beh.}$$



Eine reelle Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine *Treppenfunktion*, wenn f messbar ist und nur endlich viele Funktionswerte hat. Seien a_1, \dots, a_m genau die möglichen Funktionswerte von f .

Bilden:

$$A_i = \{f = a_i\} \quad i = 1, \dots, m$$

$\Rightarrow A_1, \dots, A_m$ sind messbar

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ f\"ur } i \neq j$$

$$M = \bigcup_{i=1}^m A_i$$

Auf A_i ist f konstant ($= a_i$). Damit ergibt sich die folgende Darstellung für f :

$$f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}(x) \quad x \in M$$

Eine Funktionenfolge $\{f_\nu : M \rightarrow R^*\}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $f_\nu(x) \leq f_{\nu+1}(x)$ für alle ν auf M gilt. Die Folge (f_ν) *konvergiert von unten* gegen $f : M \rightarrow R^*$, symb. $f_\nu \nearrow f$, wenn eine monoton wachsende Folge ist und für jedes $x \in M$ $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$ gilt.

Eine Fkt. $f(x)$ heißt *nichtnegativ* (auf M), wenn $f(x) \geq 0$ auf M . Nichtnegative Treppenfunktionen heißen *Elementarfunktionen*.

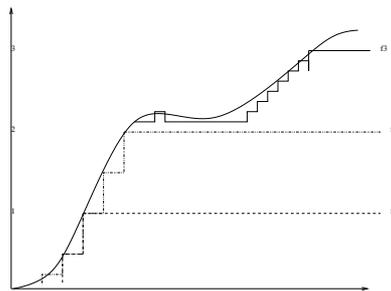
Satz 16

Sei $f : M \subseteq R^n \rightarrow R^*$ messbar und nichtnegativ.

Dann existiert eine Folge $\{f_\nu : M \rightarrow R\}$ von nichtnegativen Treppenfunktionen, die von unten gegen f konvergiert.

Beweis Sei ν gegeben. wir zerlegen $[0, \nu]$ in $\nu \cdot 2^\nu$ in Teile der Länge $\frac{1}{2^\nu}$

$$A_{\nu k} = \begin{cases} \{f \geq \frac{k}{2^\nu} \cap \{f < \frac{k+1}{2^\nu}\} & k = 0, \dots, \nu 2^\nu - 1 \\ \{f \geq \nu\} & k = \nu 2^\nu \end{cases} \quad (15)$$



$$f_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu 2^\nu} \frac{k}{2^\nu} \chi_{A_{\nu k}}(x) \quad x \in M \quad (16)$$

$$A_{\nu k} \subseteq M \text{ messbar, paarweise disjunkt, } M = \bigcup_{k=0}^{\nu 2^\nu} A_{\nu k}$$

$f_\nu : M \rightarrow R$ ist nichtnegative Treppenfunktion

Es gilt:

1.

$$0 \leq f_\nu(x) \leq f_{\nu+1}(x) \leq f(x) \text{ für alle } x \in M \quad (17)$$

$$2. \left. \begin{array}{ll} f(x) - f_\nu(x) < \frac{k}{2^\nu} & \text{falls } f(x) < \nu \\ f_\nu(x) = \nu & \text{falls } f(x) > \nu \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x) \text{ für alle } x \in M$$

1.6 Das Lebesquesche Integral

Sei $f : M \subseteq R^n \rightarrow R$ eine nichtnegative Treppenfunktion, d.h. es ex. messbare Teilmenge A_1, \dots, A_m , $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}(x)$ $x \in M$

Wir setzen:

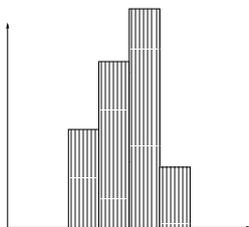
$\int_M f(x) d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu_{A_i}$	<i>Lebesque-Integral einer nichtnegativen Treppenfunktion</i>
---	---

Bemerkung

1. $0 \cdot \infty = 0$ beachten
2. $A \subseteq R^n$ messbar $\rightarrow \chi_A$ ist nichtnegative Treppenfunktion
 $\chi_A = 1 \cdot \chi_A + 0 \cdot \chi_{R^n \setminus A}$

$$\Rightarrow \int_{R^n} \chi_A d\mu = \mu(A) \quad (18)$$

3. Wenn es notwendigsein sollt, schreiben wir genauer μ_n anstelle von μ für das Lebesquesche Maß in R^n



Sei f eine nichtnegative Treppenfunktion $f : M \subseteq R^n \rightarrow R$
 Setzen $O_f = \{(x, y) \in R^{n+1} : x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\}$

O_f heißt *Ordinatenmenge* von f

Die Ordinatenmenge ist messbar bzgl. des $(n+1)$ -dim Lebesqueschen Maßes μ_{n+1} und es gilt:

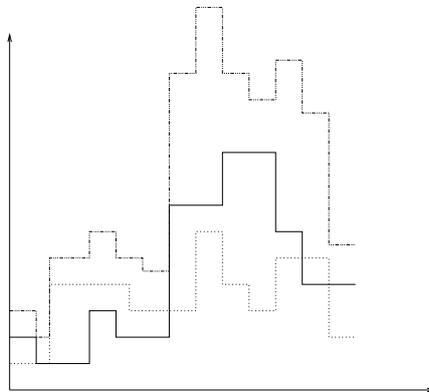
$$\mu_{n+1}(O_f) = \int_M f(x) d\mu_n \quad (19)$$

Eigenschaften des Integrals

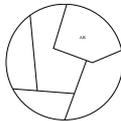
$f, g : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nichtnegative Treppenfunktionen

1. $0 \leq \int_M f(x) d\mu \leq +\infty$
2. $c \in \mathbb{R}, c \geq 0 \rightarrow c \cdot f$ ist nichtnegative Treppenfunktion
 $\int_M cf d\mu = c \int_M d\mu f$
3. $f + g$ ist nichtnegative Treppenfunktion
 $\int_M (f + g) d\mu = \int_M (f) d\mu + \int_M (g) d\mu$
4. $f(x) \leq g(x)$ auf M
 $\int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu$

ad (3):



$$f = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \chi_{A_k} \quad M = \bigcup_{k=1}^{m_1} A_k$$

$$g = \sum_{e=1}^{n_1} b_e \chi_{B_e} \quad M = \bigcup_{e=1}^{n_1} B_e$$


Die Zerlegung $\{B_1, \dots, B_{n_1}\}$ von M erzeugt für jedes k eine Zerlegung von

$$A_k : \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{n_1} (A_k \cap B_l) \quad \mu(A_k) = \sum_{l=1}^{n_1} \mu(A_k \cap B_l)$$

Die Zerlegung $\{A_1, \dots, A_{m_1}\}$ von M erzeugt für jedes B_l eine Zerlegung von

$$B_l : \quad B_l = \bigcup_{u=1}^{m_1} (B_l \cap A_u) \quad \mu(B_l) = \sum_{u=1}^{m_1} \mu(B_l \cap A_u)$$

$$\rightarrow f = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{n_1} (a_k) \chi_{A_k \cap B_l} \quad g = \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{m_1} (b_l) \chi_{A_k \cap B_l}$$

$$f + g = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{n_1} (a_k + b_l) \chi_{A_k \cap B_l} \quad M = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{n_1} (A_k \cap B_l)$$

$\Rightarrow f + g$ ist nichtnegative Treppenfunktion

$$\begin{aligned} \int_M (f+g) d\mu &= \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{n_1} (a_k + b_l) \mu(A_k \cap B_l) = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \sum_{l=1}^{n_1} \mu(A_k \cap B_l) + \sum_{l=1}^{n_1} b_l \sum_{k=1}^{m_1} \mu(A_k \cap B_l) \\ &= \sum_{k=1}^{m_1} a_k \mu(A_k) + \sum_{l=1}^{n_1} b_l \mu(B_l) = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu \quad \square \end{aligned}$$

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ nichtnegativ und messbar. (Satz16) \Rightarrow es ex. eine Folge $g(f_\nu)$ nichtnegative Treppenfunktionen mit $f_\nu \nearrow f$.

setzen $\int_M f d\mu := \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M f_\nu d\mu$ Lebesgue-Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion (20)

Bemerkungen

1. Wegen $f_\nu(x) \leq f_{\nu+1}(x)$ auf M ist

$$\int_M f_\nu d\mu \leq \int_M f_{\nu+1} d\mu \quad (21)$$

$\Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M f_\nu d\mu$ existiert (möglicherweise $+\infty$)

2. Der Grenzwert hängt nicht von der zur Approximation gewählten Folge ab, d.h. jede denselben Grenzwert.

3. Die Ordinatenmenge $\sigma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist $(n+1)$ -dim messbar und es gilt:

$$\nu_{n+1}(\sigma_f) = \int_M f d\mu \quad (22)$$

Satz17

$f, g : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ nichtnegativ, messbare numerische Funktion

Dann gilt:

(a) $0 \leq \int_M f d\mu \leq +\infty$

(b) $\int_M c f d\mu = c \int_M f d\mu$

$$(c) \int_M (f + g) d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu$$

$$(d) f(x) \leq g(x) \text{ auf } M \rightarrow \int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu$$

Beweis: ad (c) nach Vorr. ex. $f_\nu \nearrow f, g_\nu \nearrow g$

f_ν, g_ν nichtnegative Treppenfunktion

$\Rightarrow \{f_\nu + g_\nu\}$ ist Folge nichtnegativer Treppenfunktionen

und $f_\nu + g_\nu \leq f + g \quad (f_\nu + g_\nu) \nearrow (f + g)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_M (f + g) d\mu &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M (f_\nu + g_\nu) d\mu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\int_M f_\nu d\mu + \int_M g_\nu d\mu \right) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M f_\nu d\mu + \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M g_\nu d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu \quad \text{Box} \end{aligned}$$

Sei $f : m \subseteq R^n \rightarrow R^*$ nichtnegativ, messbar und $A \subseteq M$ messbar. Dann ist $f \upharpoonright_A d\mu$ nichtnegativ und messbar.

$\int_A f d\mu := \int_A f \upharpoonright_A d\mu$	<u>Lebesgue-Integral von f</u> <u>über eine messbare Teilmenge $A \subseteq M$</u>	(23)
--	---	------

Satz18

$f : M \subseteq R^n \rightarrow R^*$ nichtnegativ und messbar, $A, B \subseteq M$ messbar.

Dann gilt:

- (I) $0 \leq \int_A f d\mu \leq +\infty$
- (II) $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f d\mu = 0$
- (III) $A \cap B = \emptyset \rightarrow \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$
- (IV) $A \subseteq B \rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$

Beweis: ad (II): Sei f eine nichtnegative Treppenfunktion, d.h.

$$f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k} \quad M = \bigcup_{k=1}^m A_k \quad a_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, m \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

$$f \upharpoonright_A = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k \cap A} \quad x \in A \quad A = \bigcup_{k=1}^m (A_k \cap A)$$

$$\int_A f d\mu = \int_A f \upharpoonright_A d\mu = \sum_{k=1}^m a_k \underbrace{\mu(A_k \cap A)}_{0 \leq \mu(A_k \cap A) \leq \mu(A)} = 0 \quad (24)$$

Nun sei f eine nichtnegative messbare numerische Funktion. \Rightarrow es ex. eine Folge (f_ν) nichtnegative Treppenfunktion $f_\nu \nearrow f$

$$\text{Dann } \int_A f d\mu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \underbrace{\int_A f_\nu d\mu}_{=0 \text{ wegen (25)}} = 0 \quad \square$$

Satz19

$f, g : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ nichtnegativ und messbar

$$(I) \quad \int_M \overline{f}_{f\ddot{u}} g \Rightarrow \int_M f d\mu = \int_M g d\mu \quad (25)$$

$$(II) \quad \int_M \overline{f}_{f\ddot{u}} 0 \Leftrightarrow \int_M f d\mu = 0 \quad (26)$$

Beweis: ad (I)

$f(x) = g(x)$ für alle $x \in M \setminus M_0$ und $\mu(M_0) = 0$

$$\int_M f d\mu = \int_{M \setminus M_0} f d\mu + \underbrace{\int_{M_0} f d\mu}_{=0 \text{ (II) von Satz 18}} = \int_{M \setminus M_0} g d\mu + \int_{M_0} g d\mu = \int_M g d\mu$$

ad (II) (\rightarrow) Klar

(\leftarrow) sei $\int_M f d\mu = 0$ $M_0 = \{f \neq 0\} = \{f > 0\}$ messbar $M_k = \{f \geq \frac{1}{k}\}$ messbar $k \geq 1$

$$\rightarrow M_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \text{ und } M_k \subseteq M_{k+1} \Rightarrow \mu(M_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(M_k)$$

$$\Rightarrow 0 = \int_M f d\mu \geq \int_{M_k} f d\mu \geq \int_{M_k} \frac{1}{k} d\mu = \frac{1}{k} \int_M d\mu = \frac{1}{k} \mu(M_k) \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{k} \mu(M_k) = 0 \rightarrow \mu(M_k) = 0$$

$$\mu(M_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(M_k) = 0 \rightarrow \int_M \overline{f}_{f\ddot{u}} 0 \quad \square$$

Satz der monotonen Konvergenz (B. Levi)

Seien (f_ν) eine monoton wachsende Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen auf M , die fast überall gegen die Fkt $f : M \rightarrow \mathbb{R}^*$ konvergiert. Dann ist f ebenfalls messbar und es gilt:

$$\boxed{\int_M f d\mu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M f_\nu d\mu} \quad (27)$$

Beweis: 'Fischer/Kaul Bd.2 S.526-528'
 'Heinz Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie S.51/52 (de Gruyter 1968)'

OBdA sei $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$ f_ν $\nu = 1, 2, \dots$ nichtnegativ, messbar

(Satz16) \Rightarrow für ν ex. Folge von nichtneg. Treppenfunktionen
 $(U_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$ $(U_{\nu n}) \nearrow f_\nu$

$$V_m := \sup(U_{1m}, \dots, U_{mm}) \quad (1)$$

V_m sind nichtneg. Treppenfkt.

$$U_{km} \leq U_{k,m+1} \quad k = 1, \dots, m \rightarrow V_m \leq V_{m+1} \quad (2)$$

$$U_{km} \leq f_k \leq f_m \quad k = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow V_m \leq f_m \quad (3)$$

$$\rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} V_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f \quad (4)$$

$$(1) U_{nm} \leq V_m \text{ für } n \leq m \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_{nm} = f_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} V_m$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \leq \lim_{m \rightarrow \infty} V_m \quad (5)$$

$$\Rightarrow (4)+(5) V_m \nearrow f$$

$$\rightarrow \int_M f d\mu \underset{\text{nach Def.}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M V_m d\mu \underset{\text{(wegen(3))}}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f_m d\mu \quad (6)$$

$$f_m \nearrow f \rightarrow f_m \leq f \rightarrow \int_M f_m d\mu \leq \int_M f d\mu \quad (7)$$

$$(6)+(7) \Rightarrow \int_M f d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_M f_m d\mu \quad \square$$

Korollar 1. Sei (f_ν) eine Folge nichtnegativer messbarer Fkt. Dann ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ messbar und es ist:

$$\int_M \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu d\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_M f_\nu d\mu \quad (28)$$

Korollar 2 (δ -Additivität des Integrals)

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ nichtnegativ und messbar, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, M_k paarweise disjunkt und messbar. Dann gilt:

$$\int_M f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f d\mu \quad (29)$$

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ messbar.

$\rightarrow f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ für alle $x \in M$ und f^+, f^- sind messbar und nicht-negativ.

\rightarrow Es ex. die Integrale

$$\int_M f^+ d\mu \text{ und } \int_M f^- d\mu$$

f heißt *integrierbar* (genauer: Lebesgue-Integrierbar oder L-integrierbar), wenn f messbar ist und die Integrale $\int_M f^+ d\mu$ und $\int_M f^- d\mu$ endlich sind. Wenn f integrierbar ist, dann setzen wir:

$$\int_M f d\mu = \int_M f^+ d\mu - \int_M f^- d\mu \quad \text{Lebesgue-Integral einer integrierbaren Funktion}$$

Satz20

Jede integrierbare Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist fast überall endlich

Beweis: $M_{+\infty} = \{f = +\infty\}$ messbar

$$\int_M f^+ d\mu \geq \int_{M_{+\infty}} f^+ d\mu \geq \int_{M_{+\infty}} k d\mu = k \int_{M_{+\infty}} 1 \cdot d\mu = \mu(M_{+\infty})$$

für jede Zahl k

$$\rightarrow 0 \leq \mu(M_{+\infty}) \leq \underbrace{\frac{1}{k} \int_M f^+ d\mu}_{\text{reelle Zahl da intbar}} \rightarrow \mu(M_{+\infty}) = 0$$

analog $\mu(M_{-\infty}) = 0$

Satz21

Für jede Funktion $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) f ist integrierbar

- (b) f^+ und f^- sind integrierbar
- (c) f messbar und $|f|$ ist integrierbar
- (d) f messbar und es ex. eine Integrierbare Funktion $g : M \rightarrow R^*$ mit $|f(x)| \leq g(x)$ (Majorantenkriterium)

Beweis: (a) \Rightarrow (b) (ergibt sich aus der Definition)

(b) \Rightarrow (c) f ist messbar (klar)

$$|f| = f^+ + f^- \quad \int_M |f| d\mu = \int_M f^+ d\mu + \int_M f^- d\mu < \infty$$

$\rightarrow |f|$ integrierbar.

(c) \Rightarrow (d) setzen $g = |f|$

(d) \Rightarrow (a) $0 \leq f^\pm \leq |f| \leq g(x)$ nichtnegativ, messbar

$$\rightarrow \int_M f^\pm d\mu \leq \int_M g(x) d\mu < \infty \rightarrow f \text{ ist integrierbar} \quad \square$$

Satz 22

$$f, g : M \subseteq R^n \rightarrow R^* \text{ und } f \stackrel{\text{f\"u}}{=} g.$$

Dann gilt:

- (I) f ist integrierbar gdw g ist integrierbar
- (II) $\int_M f d\mu = \int_M g d\mu$

Beweis: $f \stackrel{\text{f\"u}}{=} g^\pm$ (Satz 19)

$\mathfrak{S}^1(M)$ sei die Menge der auf M integrierbaren Funktionen

Eigenschaften des Integrals

1. Linearitat

$$\int_M (f + g) d\mu = \int_M f d\mu + \int_M g d\mu$$

$$\int_M cf d\mu = c \int_M f d\mu \quad c \in R$$

2. Monotonie

$$f(x) \leq g(x) \text{ auf } M \Rightarrow \int_M f d\mu \leq \int_M g d\mu$$

3. Dreiecksungleichung

$$\left| \int_M f d\mu \right| \leq \int_M c|f| d\mu$$

Beweis: ad (I) $f + g$ fast überall definiert (Unendlichkeitsstellen Nullmenge)

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ nichtnegativ, messbar

$$\rightarrow \int_M |f + g| d\mu \leq \int_M |f| d\mu + \int_M |g| d\mu < \infty$$

$\rightarrow |f + g|$ integrierbar

$$(f + g) = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$\rightarrow (f + g) + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$ nichtnegativ, messbar

$$\rightarrow \int_M (f + g)^+ d\mu + \int_M f^- d\mu + \int_M g^- d\mu = \int_M (f + g)^- d\mu + \int_M f^+ d\mu + \int_M g^+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int_M (f + g) d\mu = \int_M (f + g)^+ - \int_M (f + g)^- d\mu$$

$$= \underbrace{\int_M f^+ d\mu - \int_M f^- d\mu}_\int_M f d\mu + \underbrace{\int_M g^+ d\mu - \int_M g^- d\mu}_\int_M g d\mu$$

$$= \int_M f d\mu + \int_M g d\mu$$

ad (III) $f, |f|$ integrierbar

$$\begin{array}{l} f(x) \leq |f(x)| \text{ (wegen (II))} \Rightarrow \int_M f d\mu \leq \int_M |f| d\mu \\ -f(x) \leq |f(x)| \text{ (wegen (II))} \Rightarrow -\int_M f d\mu \leq \int_M |f| d\mu \end{array} \left| \begin{array}{l} \int_M f d\mu \\ \int_M |f| d\mu \end{array} \right| \leq \int_M |f| d\mu$$

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ integrierbar und $A \subseteq M$ messbar.

$\Rightarrow f \upharpoonright_A$ ist messbar.

$$f \upharpoonright_A = f \upharpoonright_A^+ - f \upharpoonright_A^- = f^+ \upharpoonright_A - f^- \upharpoonright_A$$

$$\int_A f^\pm \upharpoonright_A d\mu = \int_A f^\pm d\mu \leq \int_M f^\pm \upharpoonright_A d\mu < \infty$$

$\rightarrow f \upharpoonright_A$ ist integrierbar

$$\int_A f d\mu := \int_A f \cdot \mathbb{1}_A d\mu$$

Lebesgue-Integral über eine messbare Teilmenge $A \subseteq M$

Für die Integration integrierbarer Fkt. gelten die entsprechenden Eigenschaften und Regeln (z.B.: Satz 18, δ -Additivität (30))

Klassen integrierbarer Funktionen

1. $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ messbar und beschränkt, $\mu(M) < \infty$. Dann ist f integrierbar.

Beweis: f messbar, $|f(x)| \leq m_0$ auf M

$$\rightarrow \int_M |f| d\mu \leq \int_M m_0 d\mu = m_0 \mu(M) < \infty \rightarrow f \text{ integrierbar}$$

2. $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ stetig, M kompakt: Dann ist f integrierbar

Beweis: $\rightarrow f$ messbar und beschränkt, $\mu(M) < \infty \rightarrow f$ integrierbar

3. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei Riemann-messbar und $f : M \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f (Lebesgue)-Integrierbar und es ist $\int_M f d\mu = \int_M f(\bar{x}) d(\bar{x})$

Kriterium für Riemann-Integrierbarkeit

f ist Riemann-integrierbar gdw f fast überall stetig ist.

Uneigentliche Riemann-Integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad (a) \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (b) \quad \text{sinnlos im Riemannschen Sinne}$$

1. $M = [1, \infty)$ messbar, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ messbar auf M

$$\rightarrow \int_M f d\mu \text{ ex.}$$

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad I_k = [k, k+1)$$

δ -Additivität (Korollar 2)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)_k^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

$\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ heißen uneigentliche Integrale und sind definiert durch:

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f(x)dx &:= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx \\ \int_{-\infty}^a f(x)dx &:= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x)dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &:= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx\end{aligned}$$

Ein uneigentliches Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ ist absolut konvergent gdw f über $[a, \infty)$ Lebesgue-integrierbar ist.

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert (d.h. $< \infty$), aber $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $[0, \infty)$ nicht integrierbar.

2. $M = [0, 1]$ messbar $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf M messbar

$$M = \bigcup_{k=1}^\infty I_k \quad I_0 = \{0\} \quad I_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu = \sum_{k=0}^\infty \int_{I_k} \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu$$

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu = \sum_{k=1}^\infty (2\sqrt{x}) \Big|_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (2 - 2\sqrt{\frac{1}{k+1}}) = 2$$

(δ -Additivität, Korollar 2)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist über $[0, 1)$ integrierbar.

Sei $f(x)$ in einer Umgebung von $x_0 \in [a, b]$ unbeschränkt. x_0 heißt singuläre Stelle oder Singularität von $f(x)$

x_0 sei die einzige Singularität von $f(x)$ in $[a, b]$

setzen:

$$\int_a^{x_0} f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \epsilon} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx$$

und dann:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

Falls diese Grenzwerte existieren heißt $f(x)$ uneigentlich integrierbar und $\int_a^b f(x) dx$ uneigentliches Integral von $f(x)$.

Wie unter (1) gilt auch hier: Wenn das uneigentliche Integral ex., dann ist es gleich dem Lebesgue-Integral, wenn die Funktionen integrierbar ist.

Satz von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesque) (f_ν) sei eine Folge messbarer Funktionen und $g(x)$ eine integrierbare Funktion, so dass $|f_\nu(x)| \leq g(x)$ für fast alle $x \in M$ und alle ν gilt. Falls (f_ν) auf M fast überalle gegen $f(x)$ konvergiert, dann ist $f(x)$ integrierbar und es ist

$$\int_M f d\mu = \int_M \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu d\mu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_M f_\nu d\mu$$

Beweis: OBdA sei $(f_\nu(x)) \leq g(x) \quad \nu=1, 2, \dots$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$ für alle $x \in M$

(Satz 21) $\rightarrow f_\nu \quad \nu = 1, 2, \dots$ sind integrierbar

$f_\nu \rightarrow f \rightsquigarrow f$ messbar und $|f(x)| \leq g(x)$

(Satz 21) $\Rightarrow f$ integrierbar

setzen:

$$U_n(x) := \inf_{m \geq n} (g(x) + f_m(x)) \quad (1)$$

- (a) U_n messbar $n = 1, 2, \dots$ (wegen Satz15)
 (b) $U_n(x) \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots$ (wegen $|f_m(x)| \leq g(x)$)
 (c) nach (1) ist U_n monoton aufsteigend

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) = \sup_n U_n(x) = \sup_n \inf_{m \geq n} (g(x) + f_m(x))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g(x) + f_m(x)) = g(x) + f(x)$$

$$\rightarrow U_n \nearrow g + f$$

- (d) $U_n(x) \leq g(x) + f_n(x) \quad$ (wegen(1))

$$\int_M (g + f) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M U_n d\mu \leq \int_M g d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu$$

$$\rightarrow \int_M f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu \quad (2)$$

Anwendung: Integration parameterunabhängiger Integrale

Gegeben sei eine Funktion $f : M \times [a, b] \rightarrow R \quad M \subseteq R^n$ Für jedes $t, n[a, b]$ sei die Funktion $f(x, t)$ integrierbar (bzgl. x):

$$F(t) = \int_M f(x, t) d\mu \quad t \in [a, b]$$

Für alle $x \in M$ sei $f(x, t)$ nach t stetig diffbar (als Fkt von t). Es sei $|\frac{\partial t}{\partial t}(x, t)| \leq g(x) \quad x \in M \quad t \in [a, b] \quad g(x)$ integreirbar.

Dann ist F stetig diffbar und $F'(t) = \int_M \frac{\partial t}{\partial t}(x, t) d\mu \quad t \in [a, b]$

BEWEIS:

$t_0 \in [a, b]$ fixiert, $t_\nu \rightarrow t_0 \quad t_\nu \neq t_0 \quad \nu = 1, 2, \dots$

$$\frac{F(t_\nu) - F(t_0)}{t_\nu - t_0} = \int_M \frac{f(x, t_\nu) - f(x, t_0)}{t_\nu - t_0} d\mu$$

setze $f_\nu(x) = \frac{f(x, t_\nu) - f(x, t_0)}{t_\nu - t_0} \rightarrow \frac{\partial t}{\partial t}(x, t_0)$ für alle $x \in M$

$$|f_\nu(x)| = \frac{|f(x, t_\nu) - f(x, t_0)|}{|t_\nu - t_0|} = \frac{1}{|t_\nu - t_0|} \left| \frac{\partial t}{\partial t}(x, t_0 + \nu(t_\nu - t_0)) \right| \cdot |t_\nu - t_0| \leq g(x)$$

$$(2)+(4) \Rightarrow \int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu \quad \square$$

$\mathcal{L}^1(M)$ Menge der integrierbaren, reellen Funktionen

$\mathcal{L}^1(M)$ ist eine linearer Raum

$H : \mathcal{L}^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften

- (H1) $Hf \geq 0$
- (H2) $H(cf) = |c|H(f)$
- (H3) $H(f+g) = H(f) + H(g)$

Eine Fkt. H mit den Eigenschaften (H1)–(H2) heißt *Halbraum*. Schreiben $\|f\|_1$ anstelle von $H(f)$.

Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ integrierbarer reeller Funktionen heißt *im Mittel konvergent* gegen die integrierbare reelle Fkt. f , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_1 = 0$ gilt.

Normkonvergenzsatz Jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist in $\mathcal{L}^1(M)$ im Mittel konvergent.

Beweis

(f_n) Cauchy-Folge

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \text{ ex. } n_\epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon \quad \|f_n - f_m\|_1 < \epsilon$$

Wir wählen zu $\epsilon = (\frac{1}{2})^k \quad k = 1, 2, \dots$ jeweils ein passendes n_k und bilden die Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

OBdA kann (n_k) als monoton wachsend angenommen werden.

(nach konstruktion): $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < (\frac{1}{2})^k \quad k = 1, 2, \dots$

setzen: $g_k(x) := f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \quad k = 1, 2, \dots$

$g_k \quad k = 1, 2, \dots$ alle messbar $\rightarrow n_m = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^m |g_k| \quad m = 1, 2, \dots$ ebenfalls messbar

$$\Rightarrow g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \text{ messbar (Korollar zu Satz 15)}$$

(Korollar 1 über die monotone Konvergenz)

$$\Rightarrow \int_M g d\mu = \int_M |f_{n_1}| d\mu + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |g_k| d\mu}_{\|g_k\|_1 < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\leq 1}} < \infty$$

\rightarrow ist integrierbar $\rightarrow g(x)$ fast überall endlich

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ fast überall absolut konvergent.

$$f(x) = \begin{cases} f_{n1} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) & \text{wenn } g(x) < \infty \text{ messbar} \\ 0 & \text{wenn } g(x) = \infty \end{cases}$$

$\Rightarrow g(x)$ ist integrierbare Majorante von $|f(x)|$

$\Rightarrow f(x)$ integrierbar

$$\Rightarrow f(x) = f_{n1}(x) + \sum_{k=1}^m g_k = f_{n1} + \sum_{k=1}^m g_k - \sum_{k=m+1}^{\infty} g_k + f_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k$$

$$\|f - f_{nm}\|_1 = \int_M |f - f_{nm}| d\mu = \int_M \left| \sum_{k=m}^{\infty} g_k \right| d\mu \leq \int_M \sum_{k=m}^{\infty} \underbrace{|g_k|}_{\|g_k\|_1 < (\frac{1}{2})^k} d\mu$$

$\Rightarrow (f_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert im Mittel gegen f

$\rightarrow (f_n)$ konvergiert gegen f

$\mathcal{L}^1(M)$ Lebesgue-integrierbare Funktionen auf M

$L^1(M)$ Lebesgue-integrierbare Funktion auf M (bzgl. $\overline{f\ddot{u}}$)

Mit der üblichen Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen ist $L^1(M)$ ebenfalls ein linearer Raum.

$$\|f\|_1 = \int_M |f| d\mu \quad (\star)$$

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_M |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f \overline{f\ddot{u}}}_0 = 0$$

\Rightarrow Durch (\star) wird auf $L^1(M)$ eine Norm definiert.

$\Rightarrow L^1(M)$ ist ein normierter Raum.

(Normkonvergenzsatz) \Rightarrow Jede Cauchy-Folge aus $L^1(M)$ ist konvergent, d.h. $L^1(M)$ ist vollständig.

Korollar: $L^1(M)$ ist ein Banachraum

Erweiterung ins Komplexe Sei $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion auf M . Dann ex. Fkt. $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

Die Fkt. $u(x)$ und $v(x)$ heißen *Real-* bzw. *Imaginärteil* von f . f messbar, wenn Real- und Imaginärteil messbar sind.

$$\int_M f d\mu := \int_M u d\mu + i \int_M v d\mu$$

Lebesgue-Integral einer komplexen Funktion

f ist integrierbar, wenn u und v integrierbar sind.

$\bar{L}^1(M)$ Menge der komplexen integrierbaren Funktionen auf M und Multiplikation mit komplexen Zahlen (bzgl. $\bar{\cdot}$ ist $\bar{L}^1(M)$ ein komplexer linearer Raum.

Wir schreiben etwa $f(x, y)$ für die von $(n + m)$ Variablen abhängige Funktion $f : R^n \times R^m \rightarrow R^*$ wobei ein Teil der Variablen zum Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ zusammengefasst werden, während die restlichen Variablen zum Vektor $y = (y_1, \dots, y_m)$ gehören. Bei der Integration schreiben wir nun:

$$\int_M f d\mu(x) \text{ oder auch } \int_M f dx \text{ anstelle von } \int_M f d\mu,$$

wenn die Werte der Variablen y fixiert sind und nur nach der Variable x integriert wird.

Satz von Fubini

Sei $f(x, y)$ eine für alle $x \in R^n$ und alle $y \in R^m$ definierte integrierbare numerische Funktion. Dann gilt:

- (I) Für fast alle $y \in R^m$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, y)$ integrierbar.
- (II) $F(y) = \int_{R^n} f(x, y) d\mu(x)$ ist überall definiert und integrierbar.

$$(III) \quad \int_{R^{n+m}} f(x, y) d\mu_{n+m}(x, y) = \int_{R^m} \int_{R^n} f(x, y) d\mu_m(x) d\mu_m(y)$$

Bemerkungen:

1. Dieser Satz gilt auch, wenn überall 'integrierbar' ersetzt wird durch 'nichtnegativ und messbar'.
2. Die Rolle von x und y lassen sich natürlich vertauschen. Somit gilt auch:

$$\int_{R^m} \int_{R^n} f(x, y) d\mu_m(x) d\mu_m(y) = \int_{R^n} \int_{R^m} f(x, y) d\mu_m(y) d\mu_m(x)$$

Sei die Funktion $f(x)$ auf der Menge $M \subseteq R^n$ definiert. Dann setzen wir:

$$\text{Es gilt: } \int_{R^n} f_M d\mu = \int_M f d\mu + \int_{R^n \setminus M} 0 d\mu = \int_M f d\mu$$

Gegeben sei eine Funktion $f : R^n \rightarrow R^*$.

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x) & x \in M \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

Die Menge $\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ heißt *Träger von f*

Sei Ω ein ebener Normalbereich:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

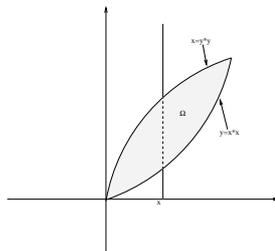
und f eine integrierbare Funktion auf Ω .

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\Omega} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Omega} dy dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Beispiel:

1. Man berechne $\int_{\Omega} (x^2 + y) d\mu$, wobei Ω von den beiden Parabeln $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird.

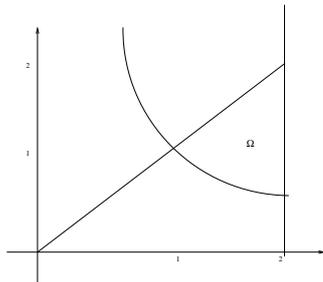


$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \\ \text{mit } \varphi(x) = x^2 \text{ und } \psi(x) = \sqrt{x}$$

Ω ist ebener Fundamentalbereich.

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{\Omega} (x^2 + y) d\mu &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy dx = \int_0^1 x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{2} x - x^4 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} x^4 \right) dx \\ &= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{10} x^5 \Big|_0^1 = \frac{33}{140} \end{aligned}$$

2. Man berechne das Integral $\int_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} d\mu$, wobei Ω das von den Geraden $x = 2$, $y = x$ und der Hyperbel $xy = 1$ begrenzte Gebiet ist.



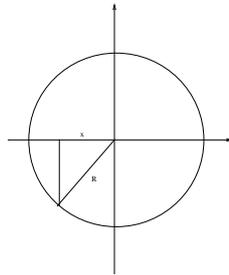
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

mit $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ und $\psi(x) = x$

$$\int_{\Omega} \frac{x^2}{2} d\mu = \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{2} dy dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y}\right) \Big|_{\frac{1}{x}}^x dx = \int_1^2 -x + x^3 dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = 2\frac{1}{4}$$

3. Man berechne den Flächeninhalt eines Kreises Ω mit dem Radius R

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \cdot d\mu$$



$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

mit $\varphi(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$
und $\psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\Rightarrow \mu(\Omega) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 dy dx = \int_{-R}^R y \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2-x^2} dx = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx$$

Substitution: $x = R \sin t \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad x' = R \cos t$

(a) Integration ist stetig

(b) $x(t)$ ist stetig diffbar

(c) $x(-\frac{\pi}{2}) = -R \quad x(\frac{\pi}{2}) = R$

(d) Wertebereich von $x(t)$ ist $[-R, R]$

$$\rightarrow 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 t) dt = R^2 \left(t + \frac{\sin^2 t}{2}\right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$$

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebige nichtleere offene Teilmengen und $\Phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus

Ein Homöomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ heißt *Diffeomorphismus* (genauer C^1 -Diffeomorphismus), wenn sowohl Φ als auch die Inverse Φ^{-1} beide stetig differenzierbar sind.

Sind Φ und Φ^{-1} beliebig oft stetig differenzierbar, so heißt Φ C^∞ -Diffeomorphismus

Transformationsformel:

Seien $P_\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\Phi : P \rightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus. Die numerische Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ ist genau dann integrierbar, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^*$ integrierbar ist und es gilt dann:

$$\boxed{\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Gamma} (f \circ \Phi) |\det \Phi'| d\mu} \quad \text{O.B.}$$

Gegeben sei eine Transformation $x = \Phi(\xi), \xi \in P$.

Einsetzen in $f(x)$ ergibt $f(\Phi(\xi))$ definiert auf P . Das Bild von P ist $\Omega = \Phi(P)$.

Das 'Bildmaß' $d\mu(x) = \left| \det \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| d\mu(\xi)$.

$$\text{also: } \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \int_{\Gamma} f(\Phi(\xi)) \left| \det \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| d\mu(\xi)$$

Satz 23

Sei $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf der nichtleeren offenen Menge U injektiv, stetig diffbar und $\det \Phi' \neq 0$. Dann ist die Bildmenge $\Phi(U) = V$ offen $\Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus.

Beweis: $x = \Phi(\xi) \quad \xi \in U \quad \text{rg} \Phi'(\xi) = n$

Sei $x_0 = \Phi(\xi_0) \rightarrow \Phi(\xi_0) - x_0 = 0$

$F(x, \xi) = \Phi(\xi) - x$ ist stetig diffbar $F(x_0, \xi_0) = 0$ und $\text{rg} \frac{\partial F}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) = \text{rg} \Phi'(\xi_0) = n$

(Auflösungssatz) $\Rightarrow F(x, \xi) = 0$ lässt sich lokal nach ξ auflösen, d.h. es ex. Umgebung W_0 von x_0 und stetig diffbare Fkt $\psi : W_0 \rightarrow U$, so dass

$\Phi(\psi(x)) - x = 0$ gilt, d.h.

$\Phi(\psi(x)) = x$ d.h.

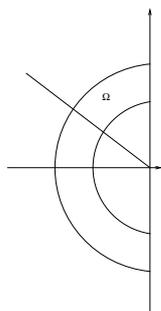
$\Psi(x) = \psi(x)$ auf W_0

$\Rightarrow V$ ist offen und $\Phi^{-1}(x)$ stetig diffbar (in Umgebung von x_0)

Beispiel

Man berechne das Flächenintegral $\int_{\Omega} (x+y)d\mu$,

wobei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, x+y \geq 0, x \leq 0\}$ ist.



Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Phi'(r, \varphi) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi' = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

Φ ist auf $U = (0, a) \times (0, 2\pi)$ injektiv, stetig diffbar und $\det \Phi' \neq 0$

$\Rightarrow \Phi$ ist Diffeomorphismus

Ω ist nicht offen. Sei $\Omega_1 = \Omega \setminus \partial\Omega$ das Innere von Ω .

$\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

$$\rightarrow \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega_1} f d\mu$$

Offenbar $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 16, x+y > 0, x < 0\}$

Φ^{-1} auf Ω_1 einschränken

$$\Phi^{-1}(\Omega_1) = \Gamma = \{(r, \varphi) : 3 < r < 4, \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{4}\pi\}$$

(Transformationsformel) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int_{\Omega_1} f d\mu = \int_{\Gamma} f(\Phi(r, \varphi)) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| d\mu(r, \varphi) \\ &= \int_{\Gamma=(3,4) \times (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)} (r \cos \varphi + r \sin \varphi) r d\mu(r, \varphi) = \int_3^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi dr \end{aligned}$$

$$= \int_3^4 r^2 (\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} dr = \int_3^4 r^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) dr = (\sqrt{2}-1) \frac{r^3}{3} \Big|_3^4 = \frac{37}{3}(\sqrt{2}-1)$$

2 Vektoranalysis

2.1 Grundbegriffe

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p$ eine nichtleere offene Teilmenge und $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq n-1$, eine stetig differenzierbarer Homöomorphismus ohne singuläre Punkte.

x_0 ist singulärer oder kritischer Punkt von $\gamma \Leftrightarrow \text{rg} \gamma'(x_0) < p$. Dann wird die Bildmenge $\Gamma = \{\gamma(x) : x \in U\}$ von γ als *einfache glatte p -dim Fläche* (Kurz: p -dim Flächenstück) bezeichnet. Die Fkt $\gamma : U \rightarrow \Gamma$ heißt *reguläre* (oder zulässige) *Parametrisierung* oder *Parameterdarstellung* von Γ .

Die Inverse $\gamma^{-1} : \Gamma \rightarrow U$ heißt *Karte* oder *lokales Koordinatensystem* von Γ .

Ist für $Q \in \Gamma$ $\gamma^{-1}(Q) = (t_1, \dots, t_p)$, so heißen t_1, \dots, t_p (*lokale Koordinaten*) von Q bzgl. der Karte γ^{-1} . Anstelle von 1-dim. Flächenstück sagen wir eher: *einfache glatte Kurve*.

Beispiel

1. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar.

setzen:

$$\begin{aligned} \gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{ist} \quad & \gamma_1(x_1, x_2) = x_1 \\ & \gamma_2(x_1, x_2) = x_2 \\ & \gamma_3(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{rg} \gamma'(x) = 2$$

$\Rightarrow \gamma$ definiert eine einfache glatte 2-dim Fläche im \mathbb{R}^3

2.2 Extremwertbestimmung auf Mannigfaltigkeiten

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim. Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion auf M ,

\Rightarrow für jeden Punkt von M gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $U \cap M$ eine einfache glatte m -dim Fläche ist, d.h. es gibt eine reguläre Parametrisierung

$$h : W \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow U \cap M \quad (W \text{ offen})$$

$f(h(t_1, \dots, t_m))$ ist eine lokale Darstellung von f in lokalen Koordinaten. f heißt *stetig differenzierbar*, wenn die lokalen Darstellungen von f stetig diffbar sind.

$P = 0 \in M$ ist ein *Kritischer Punkt* der Fkt f , wenn es eine lokale Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W$ von P_0 gibt, so dass $g^{-1}(P_0) = (a_1, \dots, a_m)$ ein kritischer Punkt der entsprechenden lokalen Darstellung $f(h(t_1, \dots, t-m))$ ist.

$$h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \Leftrightarrow h.W \rightarrow U \cap M$$

Satz2

Wenn eine differenzierbare Fkt f auf der Mannigfaltigkeit M ein Minimum oder ein Maximum hat, dann nimmt sie diese Werte in einem kritischen Punkt an.

Beweis: Wenn f an einer Stelle der Mannigfaltigkeit M extremal ist, dann hat auch die lokale Darstellung von f dort einen relativen Extremwert, also hat die lokale Darstellung dort einen kritischen Punkt. \square

Satz3

Es sei eine auf der offenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig diffbare reelle Fkt und $g : A \rightarrow \mathbb{R}^k, k < n$, stetig diffbar ohne singuläre Nullstellen.

Sei $\xi \in M = \{x \in A : g(x) = 0\}$ ein kritischer Punkt von f auf der durch $g = 0$ definierten Mannigfaltigkeit M . Dann ex. reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$,

so dass ξ ein kritischer Punkt der Funktion $F = f - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i$ auf A ist.

Bemerkung Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ heißen Lagrange Multiplikatoren

Beweis:

$$rg \quad g'(\xi) = k$$

$$\text{OBdA } rg \frac{\partial(g_1, \dots, g_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(\xi) = k$$

$$\rightarrow \text{ex. Fkt. } \varphi_1, \dots, \varphi_k \quad x_i = \varphi_i(x_{k+1}, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, k$$

ergeben sich aus dem Gleichungssystem: durch Auflösen nach x_1, \dots, x_n lokale

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Darstellung von f auf der Mannigfaltigkeit in der Umgebung von ξ :

$$\bar{f}(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\varphi(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

ξ Kritischer Punkt von \bar{f} :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = 0 \quad j = k+1, \dots, n$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{für } j \geq k+1$$

$$\text{Da } g_l(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \equiv 0 \quad l = 1, \dots, k$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{\partial g_l}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_l}{\partial x_j} = 0 \quad \text{für } j \geq k+1$$

also:

$$rg \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & \end{array} \right) = rg \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{array} \right)$$

denn die Spalten $k+1, \dots, n$ sind Linearkombinationen der ersten k -Spalten (mit dem selben Koeffizienten $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, k$, $j = k+1, \dots, n$)

\Rightarrow Die letzte Zeile der ersten Matrix ist eine Linearkombination der ersten k Zeilen.

d.h. es ex. Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, so dass $f'(\xi) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g'_i(\xi)$

Für die Fkt $F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x)$ gilt dann:

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g'_i(\xi) = 0$$

$\Rightarrow \xi$ ist ein kritischer Punkt von $F(x)$. \square

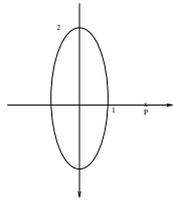
Diese Vorgehensweise heißt auch Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren*

Beispiel:

1. Gesucht ist das Maximum der Fkt. $f : R^3 \rightarrow R$ auf der Kugeloberfläche $S_R^2(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$ um den Punkt (x_0, y_0, z_0)
2. Gesucht ist das Minimum von f auf der Ebene $M = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 1\}$

Die Mannigfaltigkeiten erscheinen in der Form von Gleichungen, die auch als Nebenbedingungen bezeichnet werden. Deshalb heißt die Aufgabenstellung auch 'Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen'.

3. Welche Punkte der Ellips $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ haben vom Punkt $(2, 0)$ extremalen Abstand



Abstand zu P extremal $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4$
 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar
 $g' = (8x, 2y)$

$$rg \ g' = 1 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$$

$$g(0, 0) = -4$$

→ keine singuläre Nullstellen

→ $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ definiert eine 1-dim Mannigfaltigkeit

Betrachten 'Abstandsfunktion' $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$

Bilden: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

Kritische Punkte von F :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - 2) - 8\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow y(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

- 1. Fall: $y = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 4x^2 = 4 \\ x = \pm 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} x - 2 - 4\lambda y = 0 \\ \lambda = \frac{x-2}{4x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2x} \end{array}$$

mögliche Punkte:

$$(-1, 0) \quad \lambda = \frac{3}{4}$$

$$(1, 0) \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

- 2. Fall: $y \neq 0 \rightarrow \lambda = 1$

$$\rightarrow x - 2 - 4x \Rightarrow -2 = 3x \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = 4\frac{4}{9} + y^2 - 4 = 0$$

$$y^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9}$$

$$y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

→ kritische Punkte $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5})$ und $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5})$

Berechnung der Funktionswerte

$$f(-1, 0) = 9$$

$$f(1, 0) = 1$$

$$f(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}) = \frac{64}{9} + \frac{20}{9} = \frac{84}{9}$$

$$f(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5}) = \frac{84}{9}$$

Die Mgfk ist eine Kompakte Menge: f ist stetig.

(Satz von Weierstraß) $\Rightarrow f$ besitzt Maximum und Minimum.

(Satz2) \Rightarrow Minimum wird in kritischen Punkt angenommen
Maximum wird in kritischen Punkt angenommen

(Satz3) \Rightarrow Min\Max wird in einem der 4 angegebenen Punkte angenommen.

\Rightarrow Minimum ist 1 und wird in $(1, 0)$ angenommen

\Rightarrow Maximum ist $\frac{84}{9}$ und wird in $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5})$ und $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5})$ angenommen

2.3 Der Tangentialraum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim Mannigfaltigkeit. Ein Weg in M ist eine stetige Abl. $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Der Weg ist *glatt*, wenn γ stetig diffbar ist und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

$\gamma'(t)$ ist der *momentane Geschwindigkeitsvektor* $\|\gamma'(t)\|$

Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t

aus geometr. Sicht: $\gamma'(t)$ Tangentenvektor

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \text{ Tangenteneinheitsvektos von } \gamma(t)$$

Beispiele:

1. Seien $P = 0 = (a_1, \dots, a_n)$ und $P_1 = (b_1, \dots, b_n)$ zwei Punkte im \mathbb{R}^n

$$\gamma(t) = (1-t) \cdot P_0 + tP_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

beschreibt die Verbindungsgeraden von P_0 nach P_1 .

$$\gamma'(t) = P_1 - P_0 = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) \text{ Geschwindigkeitsvektoren.}$$

2. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$ beschreibt die Einheitskreislinie in der Ebene

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \text{ Geschwindigkeitsvektor.}$$

Der Weg γ ist *einfach*, wenn γ injektiv ist. Sei $P_0 \in M$ ein beliebiger Punkt der Mannigfaltigkeit M . Alle möglichen Tangentenvektoren in P_0 bei Bewegungen in M (+ Nullvektor) bilden einen Vektorraum $T_{P_0}(M)$. $T_{P_0}(M)$ heißt auch *Tangential- oder Tangentenraum* von M in P_0 .

Die Vektoren aus $T_{P_0}(M)$ sind an die Stelle P_0 gebunden, es sind Ortsvektoren.

Sei $P \in M$ ein beliebiger Punkt von M . Dann besitzt P eine offene zusammenhängende Umgebung $U \subseteq R^n$ so dass $U \cap M$ eine einfache glatte m -dim Fläche ist, d.h. es gibt eine reguläre Parameterdarstellung $h : W \subseteq R^m \rightarrow U \cap M$ mit $h(a_1, \dots, a_m) = P$

Da W offen ist, gibt es eine Kugel um $a_0(a_1, \dots, a_m)$ mit dem Radius ρ , die ganz in W liegt.

Durch $\xi_i^P(t) : h(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_m) \quad (a_1, \dots, t, \dots, a_m) \in t$ wird dann für jedes $i = 1, \dots, m$ ein einfacher glatter Weg durch P definiert, der mindestens für $t \in [a_i - \rho, a_i + \rho]$ existiert.

Die Wege $\xi_1^P(t), \dots, \xi_m^P(t)$ heißen *Koordinatenlinien* durch P . Die Zusammenfassung für alle Punkte aus $U \cap M$ heißt 'Koordinatenlinie der Karte h^{-1} (oder der Parametrisierung h)'.

Betrachten wir eine Bewegung auf der Mannigfaltigkeit, beschrieben durch $\xi_i^P(t)$ für ein $1 \leq i \leq m$ und messen die Geschwindigkeit bzgl. der Karte h^{-1} .

Die Position von $\xi_i^P(t)$ zum Zeitpunkt t bzgl. der Karte h^{-1} ist :

$$h^{-1}(\xi_i^P(t)) = h^{-1}(h(a_1, \dots, t, \dots, a_m)) = (a_1, \dots, t, \dots, a_m)$$

d.h. bzgl. der Karte h^{-1} sind alle Koordinaten $t_j = a_j$ konstant für $j \neq i$ und $t_i = t$.

→ Geschwindigkeit bzgl. h^{-1}

$$h^{-1}(\xi_i^P(t))' = (0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, \dots, 0)$$

Bzgl. der Karte h^{-1} beschreibt $\xi_i^P(t)$ eine Bewegung in Richtung der i -ten Koordinatenlinie mit der Konstanten Geschwindigkeit 1.

Sei $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow M$ $\gamma(t_0) = P$ $t_0 \in (a, b)$ irgendein glatter Weg auf M durch P . Lokal um P lasse sich M durch ein Gleichungssystem $g(x) = 0$ mit $rg \ g'(P) = K = n - m$ beschreiben.

$\Rightarrow g(\gamma(t)) \equiv 0$ in einer Umgebung von t_0

$\rightarrow g'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) = 0$

$\Rightarrow g'(P) \cdot v(t_0) = 0$

$\Rightarrow \gamma'(t_0) = v$ ist Lösung des Gleichungssystems $g'(P) \cdot v = 0$. Es zeigt sich, dass der Tangentenraum $T_P(M)$ genau aus diesen Lösungen besteht.

Satz 4

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim Mannigfaltigkeit mit $P \in M$. Dann gilt:

- (I) $T_P(M)$ hat die Struktur eines m -dim linearen Raums.
- (II) Ist $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte von M und $P \in U$, dann bilden die Tangentialvektoren $(\xi_1^P)', \dots, (\xi_n^P)'$ der Koordinatenlinien durch P eine Basis von $T_P(M)$.
- (III) Sei $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k = m - n$, stetig diffbar ohne singuläre Nullstellen und $U \cap M = \{x \in U : g(x) = 0\}$
Dann ist: $T_P(M) = \{v \in \mathbb{R}^n : g'(P) \cdot v = 0\}$

Beispiel: Kreislinie S^1 des Einheitskreises

$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ stetig diffbar

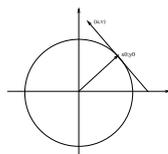
$g'(x, y) = (2x, 2y)$ $rg(g'(x, y)) = 1$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ $g(0, 0) = -1$

$\rightarrow g(x, y)$ hat keine singuläre Nullstellen

$\rightarrow M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine 1-dim Mgf

$g'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (2x_0, 2y_0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2x_0u + 2y_0v$

$\rightarrow T_{(x_0, y_0)} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : x_0u + y_0v = 0\}$



$$\begin{aligned} (u, v) \in T_{(x_0, y_0)} &\Leftrightarrow x_0u + y_0v = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei $M \subseteq R^n$ eine m -dim Mannigfaltigkeit. Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ sei $T(A) = \bigcup_{P \in A} T_P(M)$ die Menge der Tangentialräume für Punkte aus A . Nun sei $U \subseteq R^n$ offen und $h^{-1} : U \subseteq M \rightarrow W \subseteq R^m$ eine Karte von M . Messen die Geschwindigkeit ebenfalls mit Hilfe der Karte h^{-1} . Auf diese Weise erhalten wir eine Karte von $T(U \cap M)$. Damit wird $T(M)$ eine $2m$ -dim Mannigfaltigkeit und heißt *Tangentenbündel* von M .

Wir können $T(M)$ als Teilmenge des R^{2n} auffassen, die lokal durch ein Gleichungssystem $g(x) = 0$ definiert wird.

$$M = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$$

$$T = \{(x, v) \in R^{2n} : g(x) = 0 \wedge g'(x) \cdot v = 0\}$$

(g Zweimal stetig diffbar)

Eine Abbildung $\chi : M \rightarrow T(M)$ mit $\chi(P) \in T_P(M)$ heißt (*tangentiales*) *Vektorfeld* auf M .

$\tau_0^1(M)$ sei die Menge der (diffbaren) Vektorfelder auf M .

Sei $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq R^m$ eine Karte der Mannigfaltigkeit M . Mit Hilfe von h haben wir die Koordinatenlinien $\xi_i^P(t), \dots, \xi_m^P(t)$ durch den Punkt P definiert, $P \in U \cap M$. Für $1 \leq i \leq m$ setzen wir:

$$\chi_i(P) := (\xi_i^P)' \text{ (an der Stelle } P \text{)}$$

χ_i, \dots, χ_m sind Vektorfelder auf $u \cap M$.

Dabei zeigt χ_i in jedem Punkt in Richtung der i -ten Koordinatenlinie. Anstelle von χ_i schreiben wir $\partial_i^{h^{-1}}$ oder einfach ∂_i . ∂_i ist ein Vektorfeld, das an jede Stelle in die Richtung der i -ten Koordinatenlinie zeigt (bzgl Karte h^{-1})

$\partial_i, \dots, \partial_m$ heißt *Koordinatenvektorfelder* der Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq R^m$.

Sei nun χ ein bel. Vektorfeld auf M und $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq R^m$ eine Karte. $\partial_i, \dots, \partial_m$ Koordinatenvektorfeld bzgl h^{-1}

(Satz4) \Rightarrow es ex. Funktionen x_1, \dots, x_m auf $u \cap M$, so dass

$$\chi = \sum_{k=1}^m x_k \partial_k$$

- 1.
- 2.
3. $m = 2 \quad \Omega \subseteq R^3 \quad 2\text{-dim glatte Fläche}$

Sei: $\gamma : Q \rightarrow \Omega$ reguläre Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1(s, t) \\ y &= \gamma_2(s, t) \\ Z &= \gamma_3(s, t) \end{aligned} \quad (s, t) \in Q \subseteq \mathbb{R}^2$$

Setzen:

$$E = \|\partial_s\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2$$

$$G = \|\partial_t\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$

$$F = \langle \partial_s, \partial_t \rangle = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Die Skalare E, F und G heißen *metrische Fundamentalgrößen* der Fläche:

$$\|\partial_s \wedge \partial_t\|^2 = \begin{vmatrix} \langle \partial_s, \partial_s \rangle & \langle \partial_s, \partial_t \rangle \\ \langle \partial_t, \partial_s \rangle & \langle \partial_t, \partial_t \rangle \end{vmatrix} = EG - F^2$$

$$\rightarrow \|\partial_s \wedge \partial_t\| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$\rightarrow ds = \|\partial_s \wedge \partial_t\| d\mu(s, t) = \sqrt{EG - F^2} d\mu(s, t)$$

alternativ: $ds = \|\partial_s \times \partial_t\| d\mu(s, t)$

Beispiel:

Ω sei die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R . Gesucht wird der Oberflächeninhalt von Ω . reguläre Parameterdarstellung von Ω bis auf Nullmenge

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \sin \vartheta & 0 < \vartheta < \pi \\ y &= R \sin \varphi \sin \vartheta & 0 < \varphi < 2\pi \\ z &= R \cos \vartheta \end{aligned}$$

Bestimmung der Tangentenvektoren

$$\partial \vartheta = R \cos \varphi \cos \vartheta \partial x + R \sin \varphi \cos \vartheta \partial y - R \sin \vartheta \partial z$$

$$\partial \varphi = -R \sin \varphi \sin \vartheta \partial x + R \cos \varphi \sin \vartheta \partial y$$

Metrische Fundamentalgrößen

$$E = \|\partial_\vartheta\|^2 = R^2$$

$$G = \|\partial_\varphi\|^2 = R^2 \sin^2 \vartheta$$

$$F = \langle \partial_\vartheta, \partial_\varphi \rangle = 0$$

Skalares Flächenelement (für die Kugeloberfläche)

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{EG - F^2} d\mu(\vartheta, \varphi) = \sqrt{R^4 \sin^2 \vartheta} d\mu(\vartheta, \varphi) \\ &= R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Oberfläche der Kugel

$$\Omega = \int_{\Omega} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} R^2 (-\cos \vartheta)|_0^{\pi} d\varphi = 2R^2 \varphi|_0^{2\pi} = 4\pi R^2$$

2.4 Differentialformen

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim Mgfk. In jedem Punkt $P \in M$ haben wir einen Vektorraum $T_P(M)$.

Jeder Vektorraum V besitzt einen dualen Vektorraum V^* : der Vektorraum der Linearformen auf V .

Damit haben wir in jedem Punkt $P \in M$ einen dualen Vektorraum $T_P^*(M)$.

$T_P^*(M)$ heißt *Kotangentenraum* in P . Für $A \subseteq M$ sei $T^*(A) = \bigcup_{P \in A} T_P^*(M)$

$T_P^* = \bigcup_{P \in M} T_P^*(M)$ ist eine $2m$ -dim Mannigfaltigkeit, die wir *Kotangentenbündel* von M nennen.

Ist M die Mgfk der 'Orte', so ist $T^*(M)$ die Mgfk der 'Orte und Impulse', d.h. der Phasenraum.

Eine Abbildung $W : M \rightarrow T^*(M)$ mit $W(P) \in T_P^*(M)$ heißt *Kovektorfeld* oder *Differentialform* auf M .

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung mit $P \in U$ und $h^{-1} : U \cup M \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte, d.h. $h(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m) \in W$ eine reguläre Parametrisierung von $U \cup M$.

f sei ein reelle Funktion auf M .

$(f \circ h)(x_1, \dots, x_m)$ ist lokale Beschreibung von f in der Umgebung von P bzgl. der Karte h^{-1} oder in den Koordinaten x_1, \dots, x_m . Sei Q aus der Umgebung von P

$$f(Q) = f \circ \underbrace{h \circ h^{-1}}_1(Q) = (f \circ h)(h^{-1}(Q))$$

Die Ableitung von f bzgl. h^{-1} ist dann $(f \circ h)!$

Genauso ist $d(f \circ h)$ das totale Differential von f bzgl. der Karte h^{-1} . Durch $h^{-1} : U \cup M \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ bekommen wir m reelle Fkt.:

$$g_k(Q) = \Pi_k \circ h^{-1}(Q) \quad k = 1, \dots, m \text{ auf } U \cap M$$

lokale Beschreibung von $g - k(G)$ bzgl. h^{-1} :

$$(g_k \circ h)(x_1, \dots, x_m) = \Pi_k \circ \underbrace{h^{-1} \circ h}_{1}(x_1, \dots, x_m) = k_k$$

$g_k(Q)$ ist bzgl. der Karte h^{-1} die k -te Koordinate von Q . Wir schreiben deshalb einfach $x_k(Q)$ anstelle von $g_k(Q)$.

Wir erhalten m reelle Fkt x_1, \dots, x_m auf $U \cap M$, die gerade die die Koordinate bzgl. h^{-1} ergeben.

Zu diesen Fkt. gehören die totalen Differentiale dx_1, \dots, dx_m auf $U \cap M$. Nach Definition ist $dx_k|_P(V)$ die Änderung von x_k in Richtung $v \in T_P(M)$, wodurch in P auf $T_P(M)$ eine linearform definiert wird. Somit sind dx_1, \dots, dx_m Differentialformen auf $U \cap M$ und heißen *Koordinatendifferentialformen* bzgl. h^{-1} .

Insbesondere: $dx_k|_P(\partial_i) =$ Änderung von x_k in Richtung der i -ten Koordinatenlinie In jedem Punkt P bilden $dx_1|_P, \dots, dx_m|_P$ eine Basis von $T_P(M)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & k \neq i \\ 1 & k = 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Wegen der Bezeichnung } dx_k|_P(\partial_i) = \begin{vmatrix} 0 & k \neq i \\ 1 & k = 1 \end{vmatrix}$$

heißt $\{dx_1, \dots, dx_m\}$ die zu $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ *duale Basis*

Sei nun ω eine beliebige Differentialform (Kovektorfeld) auf M und $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq R^m$ eine Karte. Seien dx_1, \dots, dx_m im jedem Punkt $P \in U \cap M$ eine Basis von $T_P^*(M)$ bilden, lässt sich ω in jedem Punkt von $U \cap M$ aus dx_1, \dots, dx_m linear kombinieren, d.h. es ex. Funktionen $\omega_1, \dots, \omega_k$ auf $U \cap M$, so dass $\omega = \sum_{k=1}^m \omega_k dx_k$ gilt.

dx_1, \dots, dx_m erscheinen als 'Basisdifferentialformen'.

Differentialform ω ist stetig diffbar, wenn die Komponenten $\omega_1, \dots, \omega_m$ alle stetig differenzierbar sind.

Beispiel:

$$\omega = x^2 dx - z dy + xz dz$$

ist Differentialform im R^3 (im Kartesischen Koordinatensystem)

Sei $f : M \rightarrow R$ eine Stetige diffbare Fkt., $P \in M$ beliebig und

$h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Karte um P . Bzgl. h^{-1} finden wir nun reelle Funktionen $g_1, \dots, g_m, g_k : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$df = \sum_{k=1}^m g_k dx_k \text{ gilt.}$$

$$df|_P(\partial_i) = \sum_{k=1}^m g_k dx_k|_P(\partial_i) = g_i(P)$$

$df|_P(\partial_i)$ ist die Änderung von f in Richtung der i -ten Koordinatenlinie, d.h. die Richtungsableitung in Richtung des Vektorfeldes ∂_i .

$$\Rightarrow g_i = \partial_i f$$

Bzgl. des Koordinatensystems h^{-1} hat also df die Darstellung Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$

$$df = \sum_{k=1}^m (\partial_k f) dx_k$$

ein einfacher glatter Weg, d.h. $\gamma(t)$ ist stetig diffbar, injektiv und $\gamma'(t) \neq 0$. Der Punkt $P_0 = \gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* von γ und $P_1 = \gamma(b)$ *Endpunkt* von γ .

$$\Gamma : \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$$

$$-\gamma(t) : \gamma(a + b - t) \quad t \in [a, b]$$

$-\gamma$ ist der zu γ inverse Weg.

Durch Festlegung von Anfangs- und Endpunkt ergibt sich auf der Kurve Γ eine Orientierung.

Orientierte Kurve $i = (\Gamma, P_0, P_1)$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ ist nur dann eine reguläre Parametrisierung von i , wenn $\gamma^{-1}(P_0) < \gamma^{-1}(P_1)$

Dann heißt $\int_i \omega$ das *Kurvenintegral* (2. Art) von ω über i .

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$, $i = (\Gamma, P_0, P_1)$ eine reguläre Parametrisierung von i . setzen: Sei $\vartheta_i(P) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ für $\gamma(t) = P$

$$\int_i \omega := \int_a^b \omega(\gamma'(t)) dt$$

→ $\omega(\vartheta_i)$ ist eine auf i definierte Fkt.

$$\rightarrow (\gamma'(t)) = \omega \left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| - \omega(\vartheta_i) \|\gamma'(t)\|$$

$$\int_a^b \omega(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \omega(\vartheta_i) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\Gamma} \omega(\vartheta_i) ds$$

Kurvenintegral 1. Art

⇒ Definition ist unabhängig von der Parametrisierung

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Menge, M Mannigfaltigkeit

$h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\Gamma \subseteq U \cap M$

ω wird dargestellt mit Hilfe der Koordinatendifferentialform dx_1, \dots, dx_m :

$$\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_m dx_m$$

Tangentenvektor $\gamma'(t)$ ergibt sich:

$$\gamma'(t) = \gamma'_1(t) \partial_1 + \dots + \gamma'_m(t) \partial_m$$

$$\omega(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^m \omega_i dx_i \left(\sum_{k=1}^m \gamma'_k \partial_k \right) = \sum_{i=1}^m \omega_i \sum_{k=1}^m \gamma'_k \underbrace{dx_i(\partial_k)}_{=\delta_{ik}} = \sum_{i=1}^m \omega_i \gamma'_i$$

$$\rightarrow \int_i \omega = \int_a^b \omega(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m \omega_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) \right) dt \quad (\star)$$

Die Differentialform ω interessiert uns jetzt nun auf der Kurve i . $T_P(i)$ ist 1-dim, also ist auch $T_P^*(i)$ 1-dim.

$\gamma : (a, b) \rightarrow \Gamma$ zulässige Parametrisierung

$\gamma^{-1} : U \cap \Gamma \rightarrow (a, b)$ Karte

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i dx_i \text{ bezüglich der Karte } h^{-1}$$

dx_1, \dots, dx_m werden auf die Kurve i eingeschränkt:

(auf i): $dx_k = g_k(t) dt \quad k = 1, \dots, m$ (dt Koordinatendifferential bzgl. γ^{-1})

$$dx_k(\partial_t) = \underbrace{g_k(t)dt(\partial_t)}_{=1} = g_k(t)$$

$$dx_k(\partial_t) = \partial_t(x_k) = \partial_t(\gamma_k(t)) = \gamma'_k(t)$$

$$\rightarrow g_k(t) = \gamma'_k(t) \text{ auf } i$$

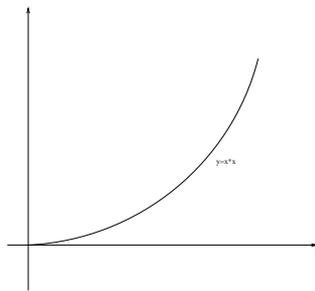
$$\rightarrow dx_k = \gamma'_k(t)dt \text{ auf } i$$

$$\Rightarrow \omega = \sum_{i=1}^m \omega_k dx_k \rightarrow \omega = \left(\sum_{k=1}^m \omega_k(\gamma(t))\gamma'(t) \right) dt$$

Bemerkung: Einschränkung von ω auf i mit Parametrisierung γ wird auch mit $\gamma^*\omega$ bezeichnet.

Beispiel:

Man berechne $\int_i x^2 dx - xydy$, wobei i die Parabel von $(0,0)$ bis $(1,1)$ ist.



Parameterdarstellung $\gamma(t) \begin{matrix} x = t \\ y = t^2 \end{matrix} \quad 0 \leq t \leq 1$
 $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \neq 0$ glatte Kurve

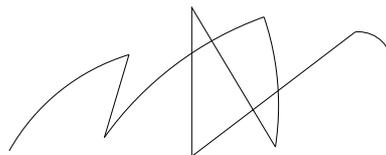
Orientierung von $(0,0)$ (Anfangspunkt) bis $(1,1)$ (Endpunkt)

$\omega = x^2 dx - xydy$ in Einschränkung auf die gegebene Kurve:

$$\begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= 2t dt \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_i x^2 dx - xydy = \int_0^1 (t^2 - t \cdot t^2 \cdot 2t) dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{5}t^5 = -\frac{1}{15}$$

Seien i_1, \dots, i_l orientierte einfache glatte Kurven mit Endpunkten $(i_i) =$ Anfangspunkt (i_{i+1}) für $i < l$



Die Zusammenfassung dieser Kurve bezeichnen wir durch $i_1 + \dots + i_l$ und nennen sie *Summen von i_1, \dots, i_l* . Derartige Summen orientierter Kurven heißen auch orientierte stückweise glatte Kurven.

Anfangspunkt von i_i ist Anfangspunkt von $i_1 + \dots + i_l$

Endpunkt von i_l ist Endpunkt von $i_1 + \dots + i_l$

Sei $i = i_1 + \dots + i_l$ eine orientierte stückweise glatte Kurve und ω eine Differentialform, die auf i definiert ist. Dann gilt:

$$\boxed{\int_i \omega = \sum_{i=1}^l \int_{i_i} \omega} \quad (\text{Additivität})$$

Zu jeder orientierten Kurve i gibt es eine entgegengesetzt orientierte Kurve $-i$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_i \omega = - \int_{-i} \omega} \quad (\text{Orientierung})$$

Riemann-Integral: $\int_a^b f(x)dx \quad - \int_b^a f(x)dx$

Sei V ein euklidischer Vektorraum, d.h. in V existiert ein Skalarprodukt $\langle \rangle$. Mit Hilfe von $\langle \rangle$ hatten wir eine Abbildung $b : V \rightarrow V^*$ und eine Abb. $\# : V^* \rightarrow V$ definiert.

Ist V endlich dimensional, dann sind b und $\#$ Isomorphismen. Die Definitionen von b und $\#$ besagen folgendes:

Sei $\delta \in V^*$ eine Liniarform und $v \in V$ Vektor. Dann gilt:

$$\# \delta = v \Leftrightarrow Bv = \delta \Leftrightarrow \text{für alle } x \in V \quad \delta(x) = \langle v, x \rangle$$

Sei $M \subseteq R^n$ eine m -dim Mgfk und auf jedem Tangentenraum $T_P(M)$ ein Skalarprodukt gegeben (die Mannigfaltigkeit M heißt dann *Riemannsche Mgfk*)

Da wir $T_P(M)$ als Unterraum des R^n ansehen können, erhalten wir auf $T_P(M)$ automatisch ein Skalarprodukt, wenn auf R^n ein Skalarprodukt gegeben ist. Auf jedem Tangentenraum $T_P(M)$ haben wir dann einen Isomorphismus.

$$\mathcal{L}_P : T_P(M) \rightarrow T_P^*(M)$$

allgemein:

$$\mathcal{L} : T(M) \rightarrow T^*(M)$$

Damit können wir nun jedem Vektorfeld χ ein Kovektorfeld ${}^b\chi$ (Differentialform) zuordnen: ${}^b\chi(P) := \mathcal{L}_P \chi(P)$

Wir setzen nun einfach:

$$\int_i \chi := \int_i^b \chi$$

übliche Schreibweisen: $\int_i \langle \chi, d\vec{s} \rangle$ oder $\int_i \chi d\vec{s}$

$d\vec{s}$ heißt *Vektoriell*es Bogenelement

Diese Symbolik bedeutet: Ist $\gamma(t)$ $a \leq t \leq b$ eine zulässige Parametrisierung von i , so ist $d\vec{s} = \gamma'(t)dt$.

$\langle \chi, d\vec{s} \rangle$ bzw. $\chi \cdot d\vec{s}$ wird nun durch $\langle \chi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ ersetzt und über $[a, b]$ integriert.

Sei nun M eine m -dim MgfK und δ eine Differentialform auf M . Eine stetig diffbare Fkt. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von δ , wenn $\delta = df$ gilt. Die Differentialform δ heißt *exakt*, wenn sie eine Stammfunktion besitzt.

Sei f eine Stammfunktion von δ , d.h. $\delta = df$, i eine orientierte einfache glatte Kurve mit Anfangspunkt P_0 und Endpunkt P_1 .

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow i$ eine reguläre Parametrisierung mit $\gamma(a) = P_0$ und $\gamma(b) = P_1$.

$$\int_i \delta = \int_a^b \delta(\gamma'(t)) dt = \int_a^b dt(\gamma'(t))$$

$$(f(\gamma(t)))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = dt(\gamma'(t))$$

$$\rightarrow \int_i \delta = \int_a^b (f(\gamma(t)))' dt \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} f(\gamma(t)) \Big|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(P_1) - f(P_0)$$

Sei i ein weiterer Weg, der P_0 und P_1 verbindet, so gilt

$$\int_{\tilde{i}} \delta = \int_i \delta$$

Wir sagen: Die Integration von δ ist *wegunabhängig* oder das Kurvenintegral $\int_i \delta$ ist Wegunabhängig.

Satz 5

-
- (I) Die Integration exakter Differentialformen auf M ist wegunabhängig.
 - (II) Sei M zusammenhängend und die Integration der Differentialform δ wegunabhängig, dann ist δ exakt.
-

Ein Weg heißt *geschlossen*, wenn Anfangs- und Endpunkt gleich sind. Für das Integral über eine geschlossene orientierte stückweise glatte Kurve i in M schreiben wir auch

$$\oint_i \delta.$$

Satz6

Die Integration einer Differentialform δ auf M ist wegunabhängig gdw.
 $\oint_i \delta = 0$ für jedegeschlossene orientierte stückweise glatte Kurve i in M .

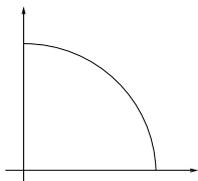
Beweis: (\rightarrow) Integration von A nach B ($A = B$) über i ist dasselbe wie für 'Kurve' $\phi(t) = A$. (Dabei ist der Wert natürlich 0)

(\leftarrow) Sei i_1 eine orientierte stückweise glatte Kurve. Seien P_0 und P_1 der Anfangs- bzw. Endpunkt von i_1 . Dann ist i_2 eine andere beliebige Kurve von P_0 nach P_1 .

$$\begin{aligned} \oint_{i_1-i_2} \delta = 0 & \quad \int_{i_1-i_2} \delta = \int_{i_1} \delta + \int_{-i_2} \delta = \int_{i_1} \delta - \int_{i_2} \delta = 0 \\ \Rightarrow \int_{i_1} \delta = \int_{i_2} \delta \end{aligned}$$

Korollar: Ist δ exakt, so ist $\oint_i \delta = 0$

Beispiel: i sei der Viertelkreisbogen, der $(1, 0)$ mit $(0, 1)$ verbindet.



Man berechne $\int 2xydx + x^2dy$
 $\rightarrow \int_i 2xydx + x^2dy = f(0, 1) - f(1, 0)$

$\delta = 2xydx + x^2dy = df$ wir sehen, dass $\delta = df$ mit $f(x, y) = x^2y$

Eins Vektorfeld χ ist ein *Gradientenfeld*, wenn es eine Fkt f gibt, so dass $\chi = \text{grad } f$ gilt. Nach Def. des Gradienten ist $\text{grad } f = \# df$. $\#$ invers zu $\#$.

$$\Rightarrow \chi = \# df \rightarrow \# \chi = \# \# df = df$$

χ ist ein Gradientenfeld gdw $\# \chi$ exakt ist. In der Physik wählt man bei Gradientenfeldern eher eine Funktion $-u$, d.h. $\chi = -\text{grad } u$. χ heißt dann *Konservatives Feld* oder *Potentialfeld*. Die Fkt. u heißt dann *Potential* von χ . Das Vektorfeld χ ist also konservativ gdw $\# \chi$ exakt ist.

\Rightarrow Ist das Vektorfeld χ konservativ, dann ist $\int_i \chi d\vec{s}$ wegunabhängig. Insbesondere ist $\oint_i \chi d\vec{s} = 0$ für jede geschlossene orientierte Stückweise glatte Kurve i .

2.5 Tensorfelder

Sind x_1, \dots, x_n verschiedene Variable, dann haben wir diese Zusammengefasst zu einem Vektor x und für Fkt mehrerer Variablen einfach $f(x)$ geschrieben.

Sei $V = R^m$ der Vektorraum der m -Tupel. Eine reelle Fkt $T(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$ auf V ist *multilinear*, wenn sie bzgl. jeder Variablen linear ist. Multilineare Abb. heißen auch *Tensoren*. Die Anzahl der Variablen ist die *Stufe des Tensors*.

Beispiel: $T(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \langle \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \rangle$

Skalarprodukte sind Bilinearformen, also 2-stufige Tensoren.

Sei $M \subseteq R^n$ eine m -dim Mgfk. In jedem Punkt $P \in M$ haben wir eine m -dim Vektorraum $T_P(M)$, den Tangentenraum. Eine Abb. S auf M , die jedem Punkt $P \in M$ einen k -stufigen Tensor auf $T_P(M)$ zuordnet heißt *k -stufiges (Kovariantes) Tensorfeld* auf M .

Beispiel: Kovektorfelder (Differentialform) sind 1-stufige Tensorfelder.

Sei S ein k -stufiges und T ein l -stufiges Tensorfeld, so wird durch $S \otimes T(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l) = S(u_1, \dots, u_k) \cdot V(v_1, \dots, v_l)$ ein $(k+l)$ -stufiges Tensorfeld definiert. $S \otimes T$ heißt *Tensorprodukt* von S und T .

Sei $u \subseteq R^n$ offen und $h^{-1} : u \cap M \rightarrow W \subseteq R^m$ eine Karte von M . Bzgl. der Karte h^{-1} ergeben sich die Koordinatendifferentialformen dx_1, \dots, dx_m . Aus diesen 1-stufigen Tensorfeldern ergeben sich durch Tensorproduktbildung die (Kovarianten) Tensorfelder $dx_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes dx_{\alpha_m}$, die wir als *Koordinatentensorfelder* bezeichnen. Bzgl. der Karte können die Koordinatentensorfelder als Basen benutzt werden.

Darstellung von Tensorfeldern durch Koordinatentensorfelder

(am Beispiel:)

Sei S ein 3-stufiges (Kovariantes) Tensorfeld auf M und $h^{-1} : U \cap M \rightarrow W \subseteq R^m$ eine Karte (lokales Koordinatensystem). Auf $U \cap M$ berechnen wir in jedem Punkt:

$$S(\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma) = S_{\alpha, \beta, \gamma}$$

und erhalten die Funktion

$$S_{\alpha, \beta, \gamma} : U \cap M \rightarrow R$$

Dann gilt:

$$S = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \sum_{\gamma=1}^m S_{\alpha, \beta, \gamma} dx_\alpha \otimes dx_\beta \otimes dx_\gamma$$

Darstellung von S durch Koordinatentensorfelder

(Physiker schreiben einfach nun $(S_{\alpha\beta\gamma})$).

Das Tensorfeld ist stetig diffbar, wenn seine Komponenten bzgl. der Koordinatentensorfelder stetig diffbar sind.

Ein Tensor T heißt *Symmetrisch*, wenn sich beim Vertauschen zweier beliebiger Argumente von T der Wert von T nicht ändert.

Sei g ein zweistufiges (Kovariantes) (differenzierbares) symmetrisches Tensorfeld auf der Mgfk M . Dann ist durch g auf jedem Tangentenraum $T_P(M)$ eine symmetrische Bilinearform gegeben. Anstelle von $g(\vartheta, b)$ für $\vartheta, b \in T_P(M)$ schreiben wir $\langle \vartheta, b \rangle$ oder $\langle \vartheta, b \rangle_P$.

Wenn sich um jeden Punkt $P \in M$ lokale Koordinaten $\bar{h}^{-1} : U \cap M \rightarrow R^m$ einführen lassen, so dass die Komponenten von g bzgl. der 2-stufigen Koordinatentensorfelder die Form

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben, so heißt g *metrisches Tensorfeld* oder *metrischer Tensor*.

Sei g ein metrisches Tensorfeld auf $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $h^{-1} : U \cap M \rightarrow R^m$ ein beliebiges Koordinatensystem. Bzgl. h^{-1} lässt sich g darstellen als:

$$g = \sum_{\alpha, \beta=1}^m g_{\alpha\beta} dx_\alpha \otimes dx_\beta$$

$$\rightarrow g_{\alpha\beta} = \langle \partial_\alpha, \partial_\beta \rangle$$

Für die Komponenten von g erhalten wir:

$$(g_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \langle \partial_{x_1}, \partial_{x_1} \rangle & \cdots & \langle \partial_{x_1}, \partial_{x_n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \partial_{x_n}, \partial_{x_1} \rangle & \cdots & \langle \partial_{x_n}, \partial_{x_n} \rangle \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{metrischer Tensor} \\ \text{in den Koordinaten } h^{-1} \end{array}$$

$$\text{Anstelle von } g \text{ schreibt man auch } ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^m g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

Beispiele:

1. $M = R^3$ mit den üblichen Kartes. Koordinaten x, y, z Koordinatenfunktionen bzw Kartesisches System

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

oder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

g ist ein 2-stufiges kovariantes sym. tensorfeld auf dem R^3

g ist der übliche metrische Tensor in kartes. Koordinaten

Komponenten von:
(in Kartes. Koordinaten) $(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. M Konfigurationsraum q_1, \dots, q_m verallgemeinerte Koordinaten

Bilden Tangentialmannigfaltigkeit $T(M)$

Verallg. Koordinaten $q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$ (koordinaten für die Tangentenvektoren)

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m m_{ij}(\bar{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$

Durch T ist in jedem Punkt \bar{q} eine positive definierte quadratische Form gegeben.

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m m_{ij}(\bar{q}) dq_i \otimes dq_j \text{ definiert auf } M \text{ ein metrisches Tensorfeld.}$$

Die 'Masse' ist bestimmt durch die Funktion $m_{ij}(\bar{q})$

3. $U \cap M = \{(x, y, z) \in R^3 : x, y, z > 0\}$

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

metrischer Tensor in Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad r > 0$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$z = r \cos \vartheta \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right); \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\partial r = a \partial_x + b \partial_y + c \partial_z$$

$$\rightarrow dx(\partial_r) = \underbrace{a dx(\partial_x)}_{=1} + \underbrace{b dx(\partial_y)}_{=0} + \underbrace{c dx(\partial_z)}_{=0} = a$$

$$\rightarrow dx(\partial_r) = \frac{\partial x}{\partial r} \text{ analog } b = \frac{\partial y}{\partial r} \quad c = \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\rightarrow \partial_r = \frac{\partial x}{\partial r} \partial x + \frac{\partial y}{\partial r} \partial y + \frac{\partial z}{\partial r} \partial z$$

$$\partial_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \partial x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \partial y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \partial z$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \partial x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \partial y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \partial z$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \vartheta \cos \varphi \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \vartheta \sin \varphi \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \vartheta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \cos \varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta \sin \varphi \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = r \sin \vartheta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \vartheta \sin \varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$\|\partial_r\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1$$

$$\|\partial_\vartheta\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2 = r^2$$

$$\|\partial_\varphi\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\langle \partial_r, \partial_\vartheta \rangle = 0 \quad \langle \partial_r, \partial_\varphi \rangle = 0 \quad \langle \partial_\vartheta, \partial_\varphi \rangle = 0$$

Komponenten des metrischen Tensors in Kugelkoordinaten:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{g} = dr \otimes dr + r^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi$$

$$\text{oder auch: } ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Ein Tensor heißt *antisymmetrisch* oder *alternierend*, wenn bei der Vertauschung je zweier Argumente sich nur das Vorzeichen ändert:

$$T(\dots, \chi, \dots, \zeta, \dots) = -T(\dots, \zeta, \dots, \chi, \dots)$$

Sei ω ein p -stufiges Kovariantes antisymmetrisches Tensorfeld auf der m -dim Mannigfaltigkeit $M \subseteq R^n$. ω heißt auch einfach p -Differentialform oder noch kürzer p -Form. Seien σ und τ 1-Formen (d.h. Differentialformen, Kovektorfelder) auf M . Wir bekommen leicht eine 2-Form wie folgt:

$$\sigma \wedge \tau := \sigma \otimes \tau - \tau \otimes \sigma$$

Das $\sigma \wedge \tau$ antisymmetrisch ist, ist trivial.

Es folgt sofort: $\tau \wedge \sigma = -\sigma \wedge \tau$ mit: $\sigma \wedge \sigma = 0$

Seien χ, ζ bel. Vektorfelder auf M .

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma \wedge \tau(\chi, \zeta) &= \sigma \otimes \tau(\chi, \zeta) - \tau \otimes \sigma(\chi, \zeta) = \sigma(\chi) \cdot \tau(\zeta) - \tau(\chi) \cdot \sigma(\zeta) \\ &= \begin{vmatrix} \sigma(\chi) & \sigma(\zeta) \\ \tau(\chi) & \tau(\zeta) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_P$ beliebige 1-Formen und χ_1, \dots, χ_P Vektorfelder auf M .

$$(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_P)(\chi_1, \dots, \chi_P) = \begin{vmatrix} \sigma_1(\chi_1) & \dots & \sigma_1(\chi_P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_P(\chi_1) & \dots & \sigma_P(\chi_P) \end{vmatrix}$$

$\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_P$ ist ein alternierendes P -stufiges Kovariantes Tensorfeld, d.h. $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_P$ ist eine P -Form.

Wir können \wedge als eine Operation auf antisymmetrischen Tensorfeldern ansehen. \wedge hat die typischen Eigenschaften eines Produktes und heißt *äußeres Produkt* oder *Keilprodukt*. (allg. def. von \wedge wollen wir übergehen)

Rechenregeln für das äußere Produkt

1. σ P -Form und τ q -Form, so ist $\sigma \wedge \tau$ eine $(p+q)$ -Form
2. $(\sigma \wedge \tau) \wedge \omega = \sigma \wedge (\tau \wedge \omega)$
3. $(f\sigma) \wedge \tau = \sigma \wedge (f\tau) = f(\sigma \wedge \tau)$ f reelle Fkt.
4. $\sigma \wedge (\tau_1 + \tau_2) = (\sigma \wedge \tau_1) + (\sigma \wedge \tau_2)$ τ_1, τ_2 q -Formen
5. $(\tau_1 + \tau_2) \wedge \sigma = (\tau_1 \wedge \sigma) + (\tau_2 \wedge \sigma)$
6. $\sigma \wedge \tau = (-1)^{Pq} \tau \wedge \sigma$ σ P -Form, τ q -Form

Sei $h^{-1} : U \cap M \rightarrow R^m$ eine Karte und dx_1, \dots, dx_m die zugehörige Koordinatendifferentialform. Aus diesen gewinnen wir *Koordinaten- P -Formen* nennen. Offenbar gilt:

$$dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_i} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_j} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_P}(\chi_1, \dots, \chi_P) = \begin{vmatrix} dx_{\alpha_1}(\chi_1) & \dots & dx_{\alpha_1}(\chi_P) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{\alpha_i}(\chi_1) & \dots & dx_{\alpha_i}(\chi_P) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{\alpha_j}(\chi_1) & \dots & dx_{\alpha_j}(\chi_P) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{\alpha_P}(\chi_1) & \dots & dx_{\alpha_P}(\chi_P) \end{vmatrix}$$

$$= -dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_j} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_i} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_P}(\chi_1, \dots, \chi_P)$$

Betrachten als Basis p -Form nur die p -Form mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$

Darstellung von p-Formen durch Koordinaten-p-Form

Sei ω eine beliebige p -Form auf $h^{-1} : U \cap M$ eine Karte (lokales Koordinatensystem). $\partial x_1, \dots, \partial x_n$ und $\partial x_1, \dots, \partial x_m$ seien die Koordinatenvektorfelder bzw. Koordinaten-1-Formen bzgl. h^{-1} . Für $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_p \leq m$ sei

$$\omega(\partial x_{\alpha_1}, \dots, \partial x_{\alpha_p}) = \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

Dann gilt:

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_p \leq m} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_p} \quad (\text{E1})$$

Darstellung durch Koordinaten p-Formen

Die Funktionen $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} : U \cap M \rightarrow R$ heißen *Komponenten von ω* . Die p -Form ω heißt *diffbar*, wenn alle Komponenten $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ (bzgl. jeder Karte) stetig diffbar sind. Der *Träger* von ω ist der Abschluss der Menge auf der ω nicht Null ist (d.h. nicht der Null-Tensor) ist.

$\bigwedge^p(M)$ Menge der diffbaren p -Formen

Für $p = 1$ ergeben sich gerade die Differentialformen. Der Fall $p = 0$ schließt die diffbaren Funktionen mit ein.

Beispiel: $M = R^4$ Kartesische Raum-Zeit-Koordinaten x, y, z, t

1-Form $\mathcal{R} = -Edt + Pxdx + Pydy + Pzdz$ (energy-momentum)

2-Form $\mathcal{F} = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$ (electromagnetic field tensor Faraday)

Für den Fall, dass ω das Produkt von 1-Formen ist, ergibt sich aus der allgemeinen Darstellung:

$\sigma_1, \dots, \sigma_p$ 1-Formen und $\omega = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_p$

Bzgl. h^{-1} gelten:

$$\sigma - i = \sum_{j=1}^m q_{ij} dx_j \quad i = 1, \dots, p$$

$\rightarrow \sigma - i(\partial x_j) = 1_{ij}$

somit:

$$\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_p(\partial x_{\alpha_1}, \dots, \partial x_{\alpha_p}) = \begin{vmatrix} \sigma_1(\partial x_{\alpha_1}) & \dots & \sigma_1(\partial x_{\alpha_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_p(\partial x_{\alpha_1}) & \dots & \sigma_p(\partial x_{\alpha_p}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} q_{1\alpha_1} & \cdots & q_{1\alpha_p} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p\alpha_1} & \cdots & q_{p\alpha_p} \end{vmatrix}$$

also:

$$\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_p = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq m} \begin{vmatrix} q_{1\alpha_1} & \cdots & q_{1\alpha_p} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p\alpha_1} & \cdots & q_{p\alpha_p} \end{vmatrix} dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_p} \quad (\text{E2})$$

Darstellung eines Produktes von 1-Formen

Beispiele: $M = \mathbb{R}^3$

1. $\sigma = dx + 3dy - dz$ $\tau = dx - dz$

(a) Man stele $\sigma \wedge \tau$ bzgl. der Koordinaten-2-Form dar!

Darstellung der 1-Form:

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & dy & dz \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Komponenten von $\sigma \wedge \tau$:

$$\omega_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \omega_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \omega_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma \wedge \tau = -3dx \wedge dy - 3dy \wedge dz$$

(b) Welche Werte $\sigma \wedge \tau$ für die Vektorfelder $\chi_1 = 5\partial_x + \partial_y - 2\partial_z$ und $\chi_2 = \partial_x - \partial_y + 3\partial_z$?

Wenn $\sigma \wedge \tau$ und die Vektorfelder in den Koordinaten einer Karte gegeben sind, dann rechnet man wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

2. $\sigma = 2ydx - dy + 2xydz$ $\tau = dx - ydy + x^2dz$

(a) Man stelle $\sigma \wedge \tau$ durch Basis-2-Form dar!

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & -1 & 2xy \\ 1 & -y & x^2 \end{pmatrix}$$

Komponenten:

$$\omega_{12} = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -2y^2 + 1 \quad \omega_{13} = \begin{vmatrix} 2y & 2xy \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} = 2yx^2 - 2xy$$

$$\omega_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2xy \\ -y & x^2 \end{vmatrix} = -x^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow \sigma \wedge \tau = (1 - 2y^2)dx \wedge dy + (2yx^2 - 2xy)dx \wedge dz + (2xy^2 - x^2)dy \wedge dz$$

(b) Welchen Wert $\sigma \wedge \tau$ für $\chi_1 = 2\partial_x - y\partial_y + \partial_z$ und $\chi_2 = \partial_x + x\partial_y - y\partial_z$?

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y & -1 & 2xy \\ 1 & -y & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -y & x \\ 1 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y + y + 2xy & 2y - 1 - 2xy^2 \\ 2 + y^2 + x^2 & 1 - xy - x^2y \end{pmatrix}$$

$$(\sigma \wedge \tau) = \begin{vmatrix} \sigma(\chi_1) & \sigma(\chi_2) \\ \tau(\chi_1) & \tau(\chi_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5y + 2xy & 2y - 1 - 2xy^2 \\ 2 + y^2 + x^2 & 1 - xy - x^2y \end{vmatrix} =$$

$$= 2x + y + 2xy + x^3 - 2x^2y - 2y^3 - 7x^2y^2 + 2xy^4$$

Falls $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ exakt sind (auf $U \cap M$), so existieren Funktionen z_1, \dots, z_p , so dass $\sigma_1 = dz_1, \dots, \sigma_p = dz_p$ gilt.

In diesem Fall gilt:

$$\sigma_i(\partial x_j) = dz_i(\partial x_j) = \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, m$$

Einsetzen in die Darstellungsformel ergibt:

$$(\text{Verallgemeinert von } dr = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_m} dx_m)$$

$$\boxed{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq m} \left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_p)}{\partial(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_p})} \right| dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_p}} \quad (\text{E3})$$

Darstellung von Produkten exakter 1-Formen

Für den Fall, dass y_1, \dots, y_m ebenfalls ein System lokaler Koordinatenbildet und $y = \Phi(x)$ ein Diffeomorphismus ist, vereinfacht sich (E3) zu:

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = \left| \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \right| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (\text{E4})$$

oder auch

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m = | \Phi' | dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

Transformationsformel bei Substitution

(Wir können diese Formel als Verallgemeinerung von $dy = y'dx$ ansehen)

Sei $n = 3$

ω 2-Form (Wirbelfeld)

Kartesische Koordinaten

$$\omega = Udy \wedge dz + Vdz \wedge dx + Wdx \wedge dy$$

Ω orientierte Fläche (2-dim Mgfk.) Parametrisierung von Ω

$$x = x(s, t) \quad y = y(s, t) \quad z = z(s, t) \quad (s, t) \in Q \quad \int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} Udy \wedge dz + Vdz \wedge dx + Wdx \wedge dy$$

$$= \int_Q \underbrace{U \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} \right| + V \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)} \right| + W \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right|}_{\begin{matrix} U & V & W \\ \frac{\partial}{\partial s} & & \\ \frac{\partial}{\partial t} & & \end{matrix}} \quad (\text{Determinante}) ds dt$$

Beispiel: Gegeben sei ein Ebenstück Ω mit der Parametrisierung

$$x = s \quad 0 < s < 1$$

$$y = t \quad 1 < t < 1$$

$$z = 1 - s - t$$

und eine 2-Form $\omega = 4xzdx \wedge dy - 3y^2zdz \wedge dx$

Man berechne: $\int_{\Omega} \omega!$

Lösung:

$$dx \wedge dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| ds \wedge dt = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ds \wedge dt = ds \wedge dt$$

$$dz \wedge dx = \left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)} \right| ds \wedge dt = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ds \wedge dt = ds \wedge dt$$

$$\Rightarrow \omega = 4xz dx \wedge dy - 3y^2 dz \wedge dx$$

$$= 4s(1-s-t) ds \wedge dt - 3t^2(1-s-t) ds \wedge dt$$

$$= (4s(1-s-t) - 3t^2(1-s-t)) ds \wedge dt$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \omega = \int_Q (4s - 4s^2 - 4st - 3t^2 + 3st^2 + t^3) ds \wedge dt$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (4s - 4s^2 - 4st - 3t^2 + 3st^2 + t^3) ds \wedge dt = -\frac{1}{12}$$

Sei $M = \mathbb{R}^3$ und x, y, z kartesische Koordinaten

$$\chi = U\partial_x + V\partial_y + W\partial_z \quad \text{Vektorfeld}$$

χ lässt sich eine 2-Form ω_χ zuordnen:

$$\omega_\chi(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \langle \chi, \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \omega_\chi \quad \text{Fluss von } \chi \text{ durch } \Omega$$

$$\int_{\Omega} \langle \chi, d\vec{\sigma} \rangle := \int_{\Omega} \omega_\chi$$

$$\omega_\chi(\partial_x, \partial_y) = W$$

$$\omega_\chi(\partial_z, \partial_x) = V$$

$$\omega_\chi(\partial_y, \partial_z) = U$$

$$\omega_\chi = Udy \wedge dz + Vdz \wedge dx + Wdx \wedge dy$$

$d\vec{\sigma}$ = vektorielles Oberflächenelement

$d\vec{\sigma}$ ist Programm:

Sei $\gamma(s, t) : Q \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega$ eine zulässige Parametrisierung.

Dann berechnet sich $d\vec{\sigma}$ zu $\partial_s \times \partial_t dsdt$

$$\partial_s \times \partial_t = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{\partial_x}{\partial_s} & \frac{\partial_y}{\partial_s} & \frac{\partial_z}{\partial_s} \\ \frac{\partial_x}{\partial_t} & \frac{\partial_y}{\partial_t} & \frac{\partial_z}{\partial_t} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} \right| \partial_x + \left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)} \right| \partial_y + \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| \partial_z$$

schließlich:

$$\int_{\Omega} \langle \chi, d\vec{\sigma} \rangle = \int_Q \langle \chi, \partial_s \times \partial_t \rangle \underbrace{dsdt}_{d\mu(s,t)} = \int_Q \|\chi \wedge \partial_s \wedge \partial_t\| d\mu$$

Ist $M \subseteq R^n$ eine n -dim Mgf. $\Rightarrow M$ ist offen.

$M \subseteq R^n$ offen $\Rightarrow M$ ist n -dim Mgf.



Bei Teilmengen einer Mgf. wollen wir grundsätzlich die topologischen Begriffe bzgl. der Topologie der Mgf. verstehen

Generell nehmen wir an, dass der Rand etwas 'Inneres' gegen etwas 'Äußeres' abgrenzt. Sei $\Omega \subseteq M$ M m -dim Mgf. eine nichtleere offene Menge (der Mgf.)

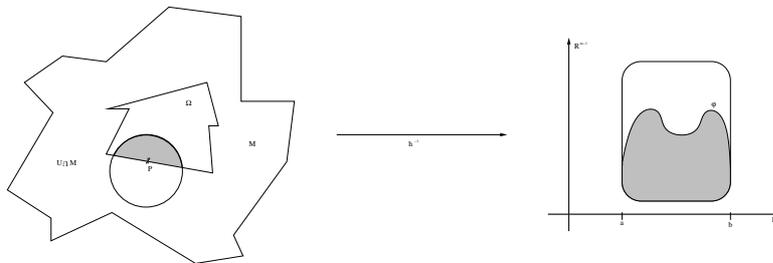
'Gegenbeispiel'



und $P \in \partial\Omega$ ein beliebiger Randpunkt von Ω (wieder bzgl. der Topologie der Mgf. M .) Sei $U \subseteq R^n$ eine offene Menge und $h^{-1} : U \cap M \rightarrow R^m$ eine Karte von M , $P \in U \cap M$ mit folgenden Eigenschaften:

- $h^{-1}(U \cap M) = (a, b) \times D$ $D \subseteq R^{m-1}$ offen
- $h^{-1}(U \cap \Omega) = \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m : (x_2, \dots, x_m) \in D, a < x_1 < \varphi(x_2, \dots, x_m)\}$

Wobei $\varphi : D \rightarrow (a, b)$ eine auf D stetige Fkt. ist. g^{-1} heißt auch *stetige Randkarte von Ω um P*

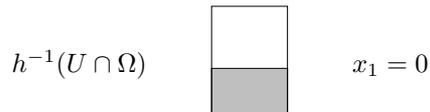


Ein Randpunkt P heißt *regulär*, wenn es eine Randkarte h^{-1} um P mit stetig diff-barer Fkt φ gibt (glatte Randkarte).

Für einen regulären Punkt P gibt es immer eine Karte

$h^{-1} : U \cap M \rightarrow R^m$ mit $\varphi \equiv 0$, d.h.

$h^{-1}(U \cap \Omega) = \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m : (x_2, \dots, x_m) \in D, a < x_1 < 0\}$



Eine nichtleere offene Menge $\Omega \subseteq M$ hat einen *glatten Rand*, wenn alle Punkte des Randes $\partial\Omega$ regulär sind.

Beispiel: Kreise, Kugeln haben glatte Ränder $\partial_{reg}\Omega$ Menge der regulären Randpunkte von Ω

Satz 7

Sei M eine m -dim MgfK und $\Omega \subseteq M$ eine nichtleere offene Teilmenge.
 Falls $\partial_{reg}\Omega \neq \emptyset$, so ist $\partial_{reg}\Omega$ eine $m - 1$ -dim MgfK.

Beweis: Wir nehmen einfach die glatten Randkarten.

Die nichtregulären Randpunkte heißen *singulär*.

$\partial_{sing}\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_{reg}\Omega$ ist die Menge der sing. Randpunkte.

$\Omega \subseteq M$ hat einen *stückweisen glatten Rand*, wenn sich die Menge der singulären Randpunkte vernachlässigen lässt.

(unpräzise Beschreibung: Ist $\partial_{sing}\Omega$ enthalten in abzählbar vielen MgfK. kleiner Dimension (als $\partial_{reg}\Omega$))

Bemerkung: Hat eine Menge einen stückweise glatten Rand, so schreiben wir einfach $\partial\Omega$ anstelle von $\partial_{reg}\Omega$ und sprechen von der Randmannigfaltigkeit.

Beispiel: Rechteck  Rand: Kanten einschließlich der Ecken
 Randmannigfaltigkeit: Kanten *ohne* Ecken

Ist M eine orientierte MgfK, so besitzt jede offene Teilmenge $\Omega \subseteq M$ eine kanonisch gegebene Orientierung.

Die Randmannigfaltigkeit $\partial\Omega (= \partial_{reg}\Omega)$ wird nun wie folgt orientiert:

Sei $h^{-1} : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine positiv orientierte Karte von M und Randkarte von $\Omega, P \in \partial\Omega$

$(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m})$ positive Orientierung in $T_P(M)$

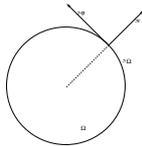
∂_{x_1} zeigt nach 'außen'

$\Rightarrow (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m})$ ist positiv orientiert in $T_P(\partial\Omega)$. Bzgl. h^{-1} wird $\partial\Omega$ in einer Umgebung von P durch $x_1 = 0$ beschrieben. $\{\partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_m}\}$ ist Basis $T_P(\partial\Omega)$. Die Orientierung von $T_P(\partial\Omega)$ legen wir dadurch fest, dass wir die Basis $(\partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_m})$ als positiv orientiert ansehen. Die so festgelegte Orientierung von $\partial\Omega$ bezeichnen wir als *Kanoische Orientierung* von $\partial\Omega$ oder als die durch Ω induzierte Orientierung. Dabei ist ∂_{x_1} an jeder Stelle von $\partial\Omega$ ein nach außen gerichteter Vektor.

Beispiel: $M = \mathbb{R}^2$ eulidische Ebene, x, y JÄ'Kartes. Koordinaten. Bei üblicher Orientierung ist (∂_x, ∂_y) positiv orientiert.

$\Omega \subseteq M = \mathbb{R}^2$ ein Kreis

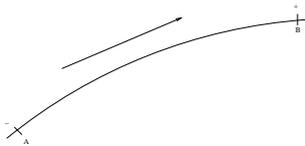
h^{-1} Polarkoordinaten



$(\partial_r, \partial_\varphi)$ positiv orientiert
 $\{\partial_\varphi\}$ Basis für die Tangentenvektoren der Peripherie
 Kanoische Orientierung heißt: (∂_φ) ist positiv orientiert

Orientierung kann somit auch durch Zeichen wie $\odot \ominus$ angegeben werden. Beliebige endliche Mengen von Punkten werden als 0-dim Mgf. angegeben.
 Orientierung: jeder Punkt bekommt ein $+$ oder ein $-$

Beispiel: Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine orientierte Kurve mit den Endpunkten A und B



$$\partial\mathcal{C} = \{A, B\}$$

Orientierung in B (induziert durch \mathcal{C}): $+$
 A (induziert durch \mathcal{C}): $-$

$$\text{orientierter Rand } \partial\mathcal{C} = +B - A$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim Mannigfaltigkeit

Satz8

Es gibt genau eine Mgf. jeder p -Form ω auf M ($1 \leq p \leq m$) eine $(p+1)$ -Form $d\omega$ zuzuordnen, so dass die Differentiationsregeln gelten.

$d\omega$ heißt *äußere* oder *Cartanische Ableitung* der Differentialform ω .

Differentiationsregeln

1. Für jede differenzierbare Fkt f ist df das übliche (totale) Differential

2. Linearität

$$\begin{aligned} d(\sigma + \tau) &= d\sigma + d\tau & \sigma, \tau & \text{ } p\text{-Form} \\ d(c \cdot \sigma) &= c \cdot d\sigma & c & \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3. Produktregel

$$d(\sigma \wedge \tau) = d\sigma \wedge \tau + (-1)^p \sigma \wedge d\tau \quad \begin{array}{l} \sigma \text{ } p\text{-Form} \\ \tau \text{ } q\text{-Form} \end{array}$$

4. Komplexeigenschaft

$$d^2 = d \cdot d = 0$$

5. lokaler Operator

$$d\omega|_{U \cap M} = d(\omega|_{U \cap M}) \quad U \subseteq R^n \text{ offen}$$

Bzgl. einer Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow R^m$ der Mgfk M in den Koordinaten x_1, \dots, x_m hat ω eine Darstellung:

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq m} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_p} \quad (\text{wegen E1})$$

Dann gilt für die Cartan-Ableitung

$$d\omega = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq m} d\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_p}$$

Beispiele: R^3 x, y, z Kartesische Koordinaten $M \subseteq R^3$ offen

1. $f : M \rightarrow R$ diffbare Fkt
äußeres Differential = totales Differential df

$$f(x, y, z) = x^2y + z^3$$

$$df = 2xydx + x^2dy + 3z^2dz$$

2. Sei σ eine 1-Form auf M .

$$\sigma = adx + vdy + wdz \quad (\text{in kartesischen Koordinaten})$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= du \wedge dx + dv \wedge dy + dw \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial u}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \wedge dy + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial w}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

3. Sei ω eine 2-Form auf M . $\omega = U dy \wedge dz + V dz \wedge dx + W dx \wedge dy$

$$\begin{aligned} d\omega &= dU \wedge dy \wedge dz + dV \wedge dz \wedge dx + dW \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \dots \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial V}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial W}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Satz von Stokes

Sei eine p -dim orientierte Mannigfaltigkeit, $\Omega \subseteq M$ eine nichtleere offene Teilmenge mit stückweise glatten Rand, $\bar{\Omega}$ kompakt und ω eine diffbare $(p-1)$ -Form. Dann gilt (bei kanonisch orientiertem Rand $\partial\Omega$)

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

Beweis: Abraham, Marden & Ratin: *Manifolds, Tensor Analysis & Applications*, Springer 1988 (S.489)

(Ganz sicher gilt der Satz für C^∞ Mannigfaltigkeiten mit glattem Rand und beliebig oft diffbar mit kompaktem Support)

Spezialfälle

1. $M = \mathbb{R}^1$ $\Omega = (a, b)$ $\partial\Omega = \{a, b\}$ kanonische Orientierung:

$$F \text{ Fkt (0-Form) } F' = dF = f dx$$

Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dF = \int_{\partial\Omega = \{b, -a\}} F = F(b) - F(a)$$

2.6 $\nabla, \#$, d und \star

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim Mgfk. Ein metrisches Tensorfeld g auf M erzeugt eine zusätzliche Struktur auf M (Riemannsche Mgfk.). g definiert auf jedem Tangentenraum $T_p(M)$ ein Skalarprodukt. Wir schreiben einfache $\langle \chi, \mathcal{L} \rangle$ anstelle von $g(\chi, \mathcal{L})$.

Bemerkung: Als Verallgemeinerung kann man auch Skalarprodukte betrachten, die nicht positiv definiert sind.

Da $M \subseteq \mathbb{R}^n$, ergibt das übliche Skalarprodukt in \mathbb{R}^n ein metrisches Tensorfeld auf M . (Falls nichts genaues vereinbart wurde, dann erhalten wir genau dieses metrische Tensorfeld.)

Mit Hilfe des Skalarproduktes eine Abb. des Vektorraums in den durch Vektorraum. Auf diese Weise hatten wir jedem Vektorfeld χ auf M ein Kovektorfeld (1-Form) ${}^b\chi$ zugeordnet. Ist $P \in M$ und $\vec{v} \in T_P(M)$, so gilt an der Stelle P : ${}^b\chi(\vec{v}) = \langle \chi, \vec{v} \rangle$. Ist also \mathcal{L} ein Vektorfeld auf M , so ist ${}^b\chi(\mathcal{L}) = \langle \chi, \mathcal{L} \rangle$

b kann als Abb. zwischen Tensorfeldern aufgefasst werden:

$$b : \Lambda_1(M) \rightarrow \Lambda^1(M) \quad ('be', 'flat')$$

Die Abbildung b ist eindeutig. Die inverse Abb. wird mit $\#$ bezeichnet:

$$\# : \Lambda^1(M) \rightarrow \Lambda_1(M) \quad ('scharp', 'Kreutz')$$

$\#$ ordnet jeder Differentialform σ ein Vektorfeld $\mathcal{A} = \# \sigma$ zu, so dass für alle Vektorfelder \mathcal{L} gilt:

$$\sigma(\mathcal{L}) = \langle \# \sigma, \mathcal{L} \rangle$$

Beispiel: M Konfigurationsraum

Das metrische Tensorfeld sei die kinetische Energie bei gegebener Massenverteilung.

$\Rightarrow b$ ordnet jedem Geschwindigkeitsfeld ein Impulsfeld zu und $\#$ umgekehrt jedem Impulsfeld ein Geschwindigkeitsfeld.

Rechenregeln: χ_1, χ_2 Vektorfelder, f skalares Feld auf M

1. $b(\chi_1 + \chi_2) = b(\chi_1) + b(\chi_2)$
2. $b(f\chi_1) = fb(\chi_1)$

Und analog für 1-Formen σ_1, σ_2

3. $\#(\sigma_1 + \sigma_2) = \#(\sigma_1) + \#(\sigma_2)$
4. $\#(f\sigma_1) = f\#(\sigma_1)$

Das Skalarprodukt zwischen 1-Formen wird geradeso gemacht, dass b und $\#$ isometrisch sind, d.h.:

5. $\langle \# \sigma_1, \# \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$
6. $\langle b\chi_1, b\chi_2 \rangle = \langle \chi_1, \chi_2 \rangle$

Dann sind nun sämtliche Tangenten- und Kotangentenräume euklidisch.

Die Abb. b und $\#$ lassen sich unmittelbar auf mehrstufige Tensorfelder ausdehnen.

Seien χ_1, \dots, χ_p Vektorfelder. Dann ist $\chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_p$ ein p -Vektorfeld. Setzen:

$$b(\chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_p) := (b\chi_1) \wedge \dots \wedge (b\chi_p) \quad p\text{-Form}$$

Durch eine Fortsetzung (in jedem Punkt) erhalten wir:

$$b : \bigwedge_p(M) \rightarrow \bigwedge^p(M)$$

Die inverse Abb. ist entsprechend

$$\# : \bigwedge^p(M) \rightarrow \bigwedge_p(M)$$

Bemerkung: Eigentlich müsste man die Abb. b und $\#$ mit zusätzlichen Indizes versehen. (Das Weglassen wird kaum zu Mißverständnissen führen)

Wie bestimmen wir b und $\#$?

Seien x_1, \dots, x_m Koordinaten bzgl. einer (positiv orientierten) Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Bzgl. dieser Karte die Koordinaten des metrischen Tensors bestimmen:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \langle \partial_{x_1}, \partial_{x_1} \rangle & \dots & \langle \partial_{x_1}, \partial_{x_m} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \partial_{x_n}, \partial_{x_1} \rangle & \dots & \langle \partial_{x_n}, \partial_{x_m} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{b(\partial x_i) = \sum_{j=1}^m g_{ij} dx_j \quad i = 1, \dots, m}$$

Sei $(g^{\alpha\beta})$ die zu $(g_{\alpha\beta})$ inverse Matrix (ex. immer), dann ergibt sich für die Umkehrabb.:

$$\boxed{\#dx_i = \sum_{j=1}^m g^{ij} \partial x_j \quad i = 1, \dots, m}$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \langle dx_i, dx_k \rangle &= \langle \#dx_i, \#dx_k \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n g^{ij} \partial x_j, \sum_{l=1}^m g^{kl} \partial x_l \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m g^{ij} g^{kl} \underbrace{\langle \partial x_j, \partial x_l \rangle}_{g_{il}} \end{aligned}$$

Einsteinsche Summenkonvention:

Jeder Index, der sowohl oben als auch unten vorkommt, ist ein Summationsindex.

$$\Rightarrow \langle dx_i, dx_k \rangle = g^{ij} g^{kl} g_{jl} \quad g^{ij} g_{jl} = \delta_l^i \text{ (Einheitsmatrix)}$$

$$= g^{kl} \delta_l^i = g^{ki} = g^{ik} \text{ (Symmetrisch)}$$

$$\Rightarrow \langle dx_\alpha, dx_\beta \rangle = g^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m$$

Beispiel: $\partial x_1, \dots, \partial x_m$ Orthonormalsystem

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \rightarrow (g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta}) = \mathcal{E}$$

$$\rightarrow b(\partial x_i) = dx_i \quad \# dx_i = \partial x_i$$

In jedem Punkt $P_0 \in M(m\text{-dim})$ der Mannigfaltigkeit haben wir die Vektorräume $T_{P_0}(M)$ und $T_{P_0}^*(M)$, d.h. die Vektoren und Kovektoren bilden jeweils einen m -dim Vektorraum. Genauso bilden aber auch in jedem Punkt $P_0 \in M$ alle p -stufigen Kovarianten bzw. Kontravarianten Tensoren jeweils einen m^p -dim Vektorraum.

Von diesen bilden jeweils die antisymmetrischen einen $\binom{m}{p}$ -dim Unterraum.

Das Skalarprodukt von $T_{P_0}(M)$ und $T_{P_0}^*(M)$ lässt sich nun auf diese Unterräume der p -Vektoren bzw. p -Formen ausweiten, so dass diese Vektorräume euklidisch sind. Seien $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_p, \vec{W}_1, \dots, \vec{W}_p \in T_{P_0}(M)$ Tangentialvektoren in P_0 . Dann sind $\vec{V}_1 \wedge \dots \wedge \vec{V}_p$ und $\vec{W}_1 \wedge \dots \wedge \vec{W}_p$ p -Vektoren

Das Skalarprodukt wird wie folgt festgelegt:

$$\langle \vec{V}_1 \wedge \dots \wedge \vec{V}_p, \vec{W}_1 \wedge \dots \wedge \vec{W}_p \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{V}_1, \vec{W}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{V}_1, \vec{W}_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{V}_p, \vec{W}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{V}_p, \vec{W}_p \rangle \end{vmatrix}$$

Gramsche Determinante

Durch lineare Fortsetzung wird so ein Skalarprodukt zwischen beliebigen p -Vektoren definiert.

Mit dem Skalarprodukt ist automatisch eine entsprechende Norm gegeben.

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ m -dim Mgfk mit metrischen Tensorfeld $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\partial x_1, \dots, \partial x_m$ seien die Koordinatenvektorfelder bzgl. einer Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dann:

$$\|\partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial x_m\|^2 = \begin{vmatrix} \langle \partial x_1, \partial x_1 \rangle & \dots & \langle \partial x_1, \partial x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \partial x_m, \partial x_1 \rangle & \dots & \langle \partial x_m, \partial x_m \rangle \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Determinante} \\ \text{der Komponenten} \\ \text{des metrischen Tensors} \end{array}$$

$$\rightarrow \|\partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial x_m\| = \sqrt{\|g_{\alpha\beta}\|}$$

Ein m -stufiges antisymmetrisches Tensorfeld auf einer orientierten m -dim Mgfk M heißt *Kanoisches Volumen*, wenn es an jeder Stelle $P \in M$ für jede positiv orientierte Orthonormalbasis in $T_p(M)$ den Wert 1 hat.

Die Kanonische Volumenform wird mit dV (oder falls nötig dV_m bezeichnet. (Eine irreführende Bezeichnung, die *nicht* das Differential von V ist!)

Satz9:

Ist M eine orientierte Mgfk mit einem metrischen Tensorfeld,
so existiert auf M die kanonische Volumenform

Beweis: Definieren eine m -Form ω wie folgt:

x_1, \dots, x_m seien Koordinaten bzgl. der (pos. orientierten) Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\omega := \sqrt{\|g_{\alpha\beta}\|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad (g_{\alpha\beta} \text{ metr. Tensor bzgl. } h^{-1})$$

Seien ξ_1, \dots, ξ_m die Koordinaten bzgl. einer anderen (pos. orientierten) Karte $h^{-1} : U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $x = \Phi(\xi)$ die entsprechende Koordinatentransformation.

$$\Rightarrow dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = |\Phi'| d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_m \quad (\text{E4+E5})$$

$$\partial_{\xi_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\xi_m} = |\Phi| \partial_{x_1} \wedge \dots \wedge \partial_{x_m}$$

$(\bar{g}_{\alpha\beta})$ Komponenten des metrischen Tensors bzgl h^{-1}

$$\omega = \sqrt{\|g_{\alpha\beta}\|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \|\partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial x_m\| dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

$$= \|\partial x_1 \wedge \dots \wedge \partial x_m\| \cdot |\Phi'| d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_m = \|\partial \xi_1 \wedge \dots \wedge \partial \xi_m\| \cdot d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_m$$

$$= \sqrt{\|\bar{g}_{\alpha\beta}\|} d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_m$$

\Rightarrow Die Definition von ω hängt nicht von den gewählten Koordinaten ab. Seien $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ eine beliebige Orthonormalbasis von $T_{P_0}(M)$

Wählen Koordinaten y_1, \dots, y_m mit $\partial y_i = \vartheta_i \quad i = 1, \dots, m$ in P_0

$$\rightarrow (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = \|\partial y_1 \wedge \dots \wedge \partial y_m\| dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$$

$$\|\partial y_1 \wedge \dots \wedge \partial y_m\|^2 = \begin{vmatrix} \langle \partial y_1, \partial y_1 \rangle & \dots & \langle \partial y_1, \partial y_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \partial y_m, \partial y_1 \rangle & \dots & \langle \partial y_m, \partial y_m \rangle \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{an der} \\ \text{Stelle} \\ P_0}}{=} \begin{vmatrix} \langle \vartheta_1, \vartheta_1 \rangle & \dots & \langle \vartheta_1, \vartheta_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vartheta_m, \vartheta_1 \rangle & \dots & \langle \vartheta_m, \vartheta_m \rangle \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m(\partial y_1, \dots, \partial y_m) = \begin{vmatrix} dy_1(\partial y_1) & \dots & dy_1(\partial y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dy_m(\partial y_1) & \dots & dy_m(\partial y_m) \end{vmatrix} =$$

$$1$$

$$\Rightarrow \omega(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = 1$$

$\Rightarrow \omega$ ist tatsächlich die Volumenform dV

Sei M eine orientierte m -dim Mgfk mit einem metrischen Tensorfeld \langle, \rangle . Dann ex. auch die Volumenform dV .

Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ 1-Form auf M .

$\Rightarrow \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_p$ ist p -Form und $\#\sigma_1, \dots, \#\sigma_p$ Vektorfelder. Setzen:

$$*(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_p) := (\#\sigma_1, \dots, \#\sigma_p, \chi_1, \dots, \chi_{m-p}) \quad (m-p)\text{-Form}$$

Durch lineare Fortsetzung ergibt sich:

$$*: \bigwedge^p(M) \rightarrow \bigwedge^{m-p}(M) \text{ Sternoperator (Hodge-Operator)}$$

Für jede p -Form ω ist $*\omega$ die *duale Ergänzung* von ω .

Eigenschaften des \star -Operators

σ, τ seien p -Formen, $\varphi \in C^\infty(M)$

Dann gilt:

1. $*(\sigma\tau) = * \sigma + * \tau$
2. $*(\varphi\sigma) = \varphi * \sigma$
3. $* * \sigma = (-1)^{p(m-p)} \sigma$
4. $\sigma \wedge * \tau = \langle \sigma \wedge \tau \rangle dV$

Bemerkung: Eigenschaft (3) formulieren wir auch als $** = (-1)^{p(m-p)}$

Spezialfall $M = R^3$

$$\star\star = (-1)^{p(3-p)} = 1$$

U, f Funktionen, χ Vektorfeld

<i>Gradient</i>	$\text{grad } f := (\#d)f$
<i>Divergenz</i>	$\text{div}\chi := (\star d \star b)\chi$
<i>Rotation</i>	$\text{rot} := (\# \star db)\chi$
<i>Laplace</i>	$\Delta U := (\star d \star d)U$

$$\text{Skalarprodukt} \quad \langle \chi, \mathcal{L} \rangle = \star (b\chi \wedge \star b\mathcal{L})$$

$$\text{Kreuzprodukt} \quad \chi \times \mathcal{L} = \# \star b(\chi \wedge \mathcal{L})$$

$M = R^3$ x, y, z kartesische Koordinaten mit üblicher Metrik

(Standardfall) metrischer Tensor:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \langle \partial_x, \partial_x \rangle & \langle \partial_x, \partial_y \rangle & \langle \partial_x, \partial_z \rangle \\ \langle \partial_y, \partial_x \rangle & \langle \partial_y, \partial_y \rangle & \langle \partial_y, \partial_z \rangle \\ \langle \partial_z, \partial_x \rangle & \langle \partial_z, \partial_y \rangle & \langle \partial_z, \partial_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung von b und $\#$

$$b(\partial_x) = dx \quad \#dx = \partial_x$$

$$b(\partial_y) = dy \quad \Rightarrow \quad \#dy = \partial_y$$

$$b(\partial_z) = dz \quad \#dz = \partial_z$$

Volumenform

$$dV = \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$$

\star -Bilder

0 -Form:

$$\star 1 = dV = dx \wedge dy \wedge dz$$

1-Form:

$$\begin{aligned} *dx &= dV(\#dx, \chi, \mathcal{L}) = dx \wedge dy \wedge dz(\partial_x, \chi, \mathcal{L}) = \begin{vmatrix} \underbrace{dx(\partial_x)}_{=1} & dx(\chi) & dx(\mathcal{L}) \\ \underbrace{dy(\partial_x)}_{=0} & dy(\chi) & dy(\mathcal{L}) \\ \underbrace{dz(\partial_x)}_{=0} & dz(\chi) & dz(\mathcal{L}) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} dy(\chi) & dy(\mathcal{L}) \\ dz(\chi) & dz(\mathcal{L}) \end{vmatrix} = dy \wedge dz(\chi, \mathcal{L}) \end{aligned}$$

$$*dx = dy \wedge dz$$

$$*dy = dz \wedge dx$$

$$*dz = dx \wedge dy$$

2-Form:

$$* * = 1$$

$$\Rightarrow *(dy \wedge dz) = dx$$

$$*(dz \wedge dx) = dy$$

$$*(dx \wedge dy) = dz$$

3-Form:

$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = * * 1 = 1$$