Vektoren

1. Definition und Darstellung von Vektoren

Unter einer Vektorgröße verstehen wir in den Naturwissenschaften eine Größe, die durch Angabe einer Maßzahl und einer Richtung vollständig beschrieben wird. Vektorgrößen werden durch Buchstaben mit Pfeilen gekennzeichnet: $\vec{a}, \vec{b}$ usw. Vektoren können symbolisch durch Pfeile dargestellt werden. Die Länge des Pfeils gibt dabei den Betrag der Maßzahl wieder. Bei technischen Größen gehört zur Angabe der Maßzahl selbstverständlich auch die Angabe der Maßeinheit.

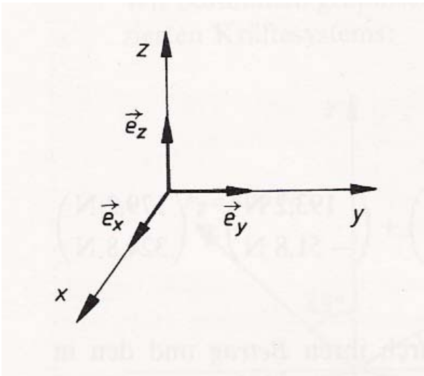
Beispiele: Vektorgrößen sind Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Drehmoment, Fläche, Elektrische Feldstärke,….

In der Mathematik ist ein Vektor ein abstraktes Gebilde, welches einige Rechengesetze erfüllt.

Definition: Sei IR die Menge der Reellen Zahlen. Dann nennen wir eine Menge V mit einer Addition einen Vektorraum über IR, falls gilt:
1) V ist eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition, d.h.
– $\vec{v}, \vec{w} \in V \quad \Rightarrow \quad \vec{v} + \vec{w} \in V$
– Es gilt das AG.
– Es gibt ein neutrales Element, den Nullvektor $\vec{0}$.
– Zu jedem Vektor $\vec{v} \in V$ gibt es einen Vektor $-\vec{v} \in V$ *mit* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
– Es gilt das KG.
2) Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und r,s $\in$ IR ist

$$r(s\,\vec{v}) = (rs)\vec{v} = s(r\,\vec{v})$$
$$(r+s)\vec{v} = r\,\vec{v} + s\,\vec{v}$$
$$r(\vec{v} + \vec{w}) = r\,\vec{v} + r\,\vec{w}$$
$$1\,\vec{v} = \vec{v}$$

Die in den Naturwissenschaften benötigten Vektorgrößen fallen unter diese Definition, aber auch geometrische Abbildungen wie Verschiebungen oder Drehungen um einen festen Punkt, Polynomfunktionen und Matrizen.



Zur Festlegung von Größen und Richtungen muss ein Bezugssystem vorgegeben sein, das Koordinatensystem. In der Regel verwenden wir ein rechtwinkliges dreidimensionales (kartesisches) Koordinatensystem. Dann legen drei Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ die Richtungen der Koordinatenachsen fest. Diese Basisvektoren haben üblicherweise die Länge 1. Jeder Vektor in der Ebene bzw. im Raum ist dann als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellbar. Die Koeffizienten der Linearkombination nennen wir die Koordinaten des Vektors:

$$\vec{v} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{Spaltenvektor}$$

Beispiele: 1) Eine Kraft von 100 N, die nach oben zeigt, wird durch den Vektor

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0N \\ 0N \\ 100N \end{pmatrix}$$ beschrieben.

2) Eine Kraft, die parallel zum Boden entlang der Winkelhalbierenden der x – y Ebene zeigt, wird z.B. durch den Vektor

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 70{,}1N \\ 70{,}1N \\ 0N \end{pmatrix}$$ beschrieben.

Die tatsächliche Größe der Kraft im letzten Beispiel ergibt sich aus dem Betrag des Vektors, der durch die Länge des zugehörigen Pfeils dargestellt wird.

Definition: Der Betrag eines Vektors ergibt sich aus seinen Koordinaten x, y und z:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Beispiele: 1) Geschwindigkeit im Zweidimensionalen:

$$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3\frac{m}{s} \\ 4\frac{m}{s} \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\frac{m}{s}$$

2) Kraft parallel zum Boden:

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{70{,}1^2 + 70{,}1^2 + 0^2} = 100N$$

3) beliebiger Vektor im IR^3 :

$$\vec{w} = 2\vec{e}_1 - 1{,}5\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-1{,}5)^2 + 6^2} = 6{,}5$$

Zwei Vektoren $\vec{v}\ und\ \vec{w}$ sind gleich, falls sie in Betrag und Richtung übereinstimmen. Dies ist genau dann erfüllt, wenn sie in allen ihren Koordinaten übereinstimmen.

Beispiele: 1) Gleiche Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

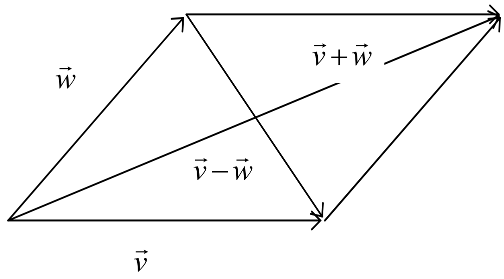
2) Verschieden Vektoren gleichen Betrags

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ besitzen beide den Betrag $\sqrt{34}$, zeigen aber in verschiedene Richtungen. Sie sind daher nicht gleich!

3) Verschiedene Vektoren gleicher Richtung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix}$ zeigen in die gleiche Richtung, besitzen aber unterschiedliche Länge und sind daher verschieden.

2. Vektoroperationen



Vektoren kann man Addieren, Subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. Dabei gelten die üblichen Rechengesetze. Dies sagen die Vektorraumaxiome aus.

Summe und Differenz zweier Vektoren $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ bilden gerichtete Diagonalen des von den Vektoren $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.

Durch die Multiplikation eines Vektors $\vec{v}$ mit einer reellen Zahl s entsteht ein Vielfaches des Vektors, also ein Vektor mit gleicher Richtung, aber veränderter Länge.

Eine Summe von Vielfachen zweier Vektoren $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ nennen wir eine Linearkombination.

Beispiel: $3\vec{v}+5\vec{w}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$.

Die Addition von Spaltenvektoren erfolgt Koordinatenweise:

$$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_v + x_w \\ y_v + y_w \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit einem Skalar, also die Vervielfachung erfolgt in jeder Koordinate:

$$\lambda\vec{v}=\lambda\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}$$

Beispiele: 1) Addition und Subtraktion:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2) S – Multiplikation

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3) Anwendung in der Physik:
Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ auf einen Körper mit der Masse m, so wird der Körper beschleunigt mit der Beschleunigung $\vec{a}$. Dabei gilt: $\vec{F}=m\,\vec{a}$.

Berechnung von Linearkombinationen erfolgt dann schrittweise durch Anwendung dieser Rechenregeln.

Beispiele:

1) $$0{,}5\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+2\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -10 \\ 35 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 23{,}5 \end{pmatrix}$$

2) $$\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+2\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Vektoren in der Ebene und im Raum

Punkte in der Ebene und im Raum können durch ihren Ortsvektor beschrieben werden. Dieser zeigt vom Nullpunkt auf den zu beschreibenden Punkt P. Ein Verbindungsvektor zwischen zwei Punkten P und Q ergibt sich dann als Differenz der Ortsvektoren.

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \end{pmatrix}$$

Beispiele: 1) Die Punkte P (3 | 5) und Q (4 | – 2) werden beschrieben durch ihre Ortsvektoren:

$$\vec{p} = \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{q} = \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Verbindungsvektoren

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dabei gilt: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$

2) Für zwei Punkte A (– 3 | 2 | – 1) und B (5 | 7 | 3)im IR^3 gilt entsprechend:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5+3 \\ 7-2 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{AB}$

Die Vektordarstellung eignet sich zur Berechnung von Seitenmittelpunkten oder Schwerpunkten. Allgemein gilt der

Satz: Liegen n gleichberechtigte Punkte $\vec{p}_1, ...\vec{p}_n$ verteilt im Raum, so wird ihr Schwerpunkt beschrieben durch den Vektor $\vec{s} = \frac{1}{n} \cdot \left(\vec{p}_1 + ... + \vec{p}_n\right)$.

Konkret lässt sich das auf geometrische Mittelpunkte anwenden ebenso wie auf die Bestimmung von Ladungs- oder Massenmittelpunkten.

Beispiele: 1) Der Mittelpunkt einer Strecke:

A (2 ; 3 ; – 7) B (6 ; – 9 ; 1)

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2) Massenschwerpunkt eines Dreiecks:

Drei gleich Massen m = 2 kg seien verteilt auf die Punkte

P_1 (2 ; – 4 ; 7), P_2 (– 1 ; 3 ; 5) und P_3 (5 ; 7; – 3).

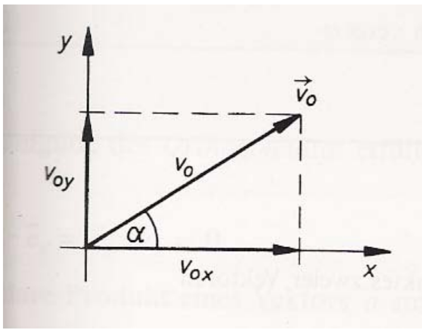
Nach außen wirkt das System wie ein Körper der Masse m = 6 kg am Ort des

Schwerpunktes $\vec{s} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

In den naturwissenschaftlichen Anwendungen kennen wir oft den Betrag einer Vektorgröße und einen Richtungswinkel α. Daraus kann man die Koordinaten des Vektors bestimmen.

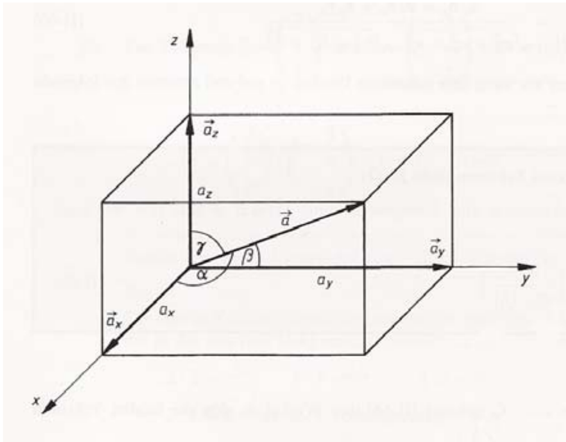
Beispiel: Für die Startgeschwindigkeit beim schrägen Wurf gilt:
$v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$
$v_{0y} = v_0 \sin(\alpha)$.
Also gilt:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(a) \\ v_0 \sin(a) \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$$



Im IR^3 benötigt man zur Festlegung der Richtung 3 Richtungswinkel relativ zu den Koordinatenachsen. Für diese Winkel gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$



Für diese Richtungswinkel gilt außerdem:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Die Winkel existieren also nicht unabhängig voneinander, sondern man kann aus zwei der Winkel den dritten bestimmen. Insbesondere muss die Summe zweier dieser Winkel stets über 90° liegen.

Beispiel: 1) Wir bestimmen die Richtungswinkel des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = 13$$

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{13} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 72{,}1° \qquad \cos(\beta) = \frac{-3}{13} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 103{,}34°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{12}{13} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22{,}6$$

2) Gegeben seien die Winkel α = 60° und β = 45°, außerdem der Betrag des Vektors a = 16.
Dann gilt:
$a_x = a \cos(\alpha) = 8$ $a_y = a \cos(\beta) = 11{,}31$
Der Winkel γ ergibt sich aus α und β:
$\cos^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) = 0{,}25$
$\cos(\gamma) = 0{,}5$ $\gamma = 60°$
$a_z = a \cos(\gamma) = 8$

Damit erhalten wir den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11{,}31 \\ 8 \end{pmatrix}$.

4. Beispiele aus der Physik

Beispiel 1: Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 120\frac{m}{s} \\ -40\frac{m}{s} \\ 30\frac{m}{s} \end{pmatrix}$ innerhalb eines definierten Koordinatensystems. Dabei beschreibt die z – Koordinate die Höhe über dem Erdboden, die y – Koordinate die Nordrichtung.

1) Wir bestimmen die Gesamtgeschwindigkeit des Flugzeugs:
Die Gesamtgeschwindigkeit wird beschrieben durch den Betrag des Vektors:

$$|\vec{v}| = \sqrt{120^2 + (-40)^2 + 30^2} = \sqrt{16900} = 130\frac{m}{s}$$

2) Wir bestimmen die Geschwindigkeit relativ zum Erdboden, d.h. die Horizontalkomponente der Fluggeschwindigkeit:

$$\vec{v}_H = \begin{pmatrix} 120\frac{m}{s} \\ -40\frac{m}{s} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_H| = \sqrt{120^2 + 40^2} = \sqrt{16000} = 126{,}5\frac{m}{s}$$

3) Wir bestimmen den Steigwinkel des Flugzeugs:
Der Steigwinkel ist der Winkel zwischen Flugrichtung und Parallelebene zum Boden, d.h. er liegt zwischen der Horizontalgeschwindigkeit v_H und der Steigkomponente v_z :

$$\cos(90° - \sigma) = \frac{v_z}{|\vec{v}|} = \frac{30}{130} \approx 0{,}23 \quad \Rightarrow \quad 90° - \sigma = 76{,}66° \quad \sigma = 13{,}34°$$

Beispiel 2: Bei einer Explosion wird ein Felsstück (m = 5 kg) in drei Teile zersplittert. Zwei Splitter (m_1 = 1,8 kg; m_2 = 1,3 kg) fliegen orthogonal zueinander mit den Geschwindigkeiten v_1 = 2,6 m/s bzw. v_2 = 3,5 m/s weg, ein dritter in eine dritte Richtung.
Aus der Gesamtmasse ergibt sich zunächst: $m_3 = m - m_1 - m_2$ = 1,9 kg.
Die Bruchteile müssen die Impulsbilanz erfüllen:
$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}$, wobei gilt: $\vec{p} = m\,\vec{v}$.
Damit ergibt sich für den dritten Impuls:

$$\vec{p}_3 = -1{,}8kg\begin{pmatrix} 2{,}6\frac{m}{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1{,}3kg\begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5\frac{m}{s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}68kg\frac{m}{s} \\ -4{,}55kg\frac{m}{s} \\ 0 \end{pmatrix} = 1{,}9kg\begin{pmatrix} -2{,}46\frac{m}{s} \\ -2{,}39\frac{m}{s} \\ \end{pmatrix}$$

$$|\vec{p}_3| = 6{,}53kg\frac{m}{s} \quad |\vec{v}_3| = 3{,}44\frac{m}{s}$$

5. Skalarprodukt

Definition: Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ versteht man den Skalar $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ ist.

Für das Skalarprodukt gelten folgende Rechenregeln:

KG : $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

DG : $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Vielfache: $\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$

Stehen die Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ senkrecht aufeinander, so wird ihr Skalarprodukt 0. Genauer gilt:

Satz: Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ ist genau dann null, wenn entweder $\vec{a}=\vec{0}\ oder\ \vec{b}=\vec{0}$ ist, oder wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\qquad\vec{b}=\begin{pmatrix}20\\12\end{pmatrix}\qquad\vec{a}\cdot\vec{b}=-60+60=0\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\perp\vec{b}$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist in der Regel nicht bekannt. Im Falle gegebener Koordinatenvektoren kann man jedoch das Skalarprodukt auch auf anderem Wege berechnen und daraus dann den Winkel bestimmen. Dazu stellen wir die Vektoren $\vec{a}\ und\ \vec{b}$ mit Hilfe ihrer Vektorkoordinaten dar:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(b_x\vec{e}_x+b_y\vec{e}_y+b_z\vec{e}_z\right)\\
&=a_xb_x\left(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x\right)+a_xb_y\left(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y\right)+a_xb_z\left(\vec{e}_x\cdot\vec{e}_z\right)\\
&\quad+a_yb_x\left(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x\right)+a_yb_y\left(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y\right)+a_yb_z\left(\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z\right)\\
&\quad+a_zb_x\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x\right)+a_zb_y\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_y\right)+a_zb_z\left(\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z\right)\\
&=a_xb_x\cdot1+a_yb_y\cdot1+a_zb_z\cdot1\\
&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann für den Winkel:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Beispiele: 1) Winkelberechnung zweidimensional

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\qquad\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}\qquad\vec{a}\cdot\vec{b}=-15-48=-63$

$\cos\varphi=\frac{-63}{5\cdot13}=-\frac{63}{65}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\arccos\left(-\frac{63}{65}\right)=165{,}75°$

2) Winkelberechnung dreidimensional

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = -6 - 4 + 24 = 14$$

$$\cos\varphi = \frac{14}{13 \cdot 3} = \frac{14}{39} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{14}{39}\right) = 68{,}96°$$

Hieraus ergibt sich auch die Berechnung der Winkel zu den Koordinatenachsen, wie wir sie oben bereits berechnet haben. Dazu wählen wir einen Vektor in Richtung der Achse, z.B. der x –Achse:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}| \cdot 1} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

Beispiel: Ein Vektor $\vec{a}$ vom Betrag 5 bildet mit der x – und der y – Achse jeweils einen Winkel von 60°. Daraus ergibt sich der Winkel zur z – Achse:

$\cos\gamma = \sqrt{1 - \cos^2 60 - \cos^2 60} = 0{,}7071 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 45°$.

Auch die Lösung für cos γ = – 0,7071, also γ = 135° ist möglich.

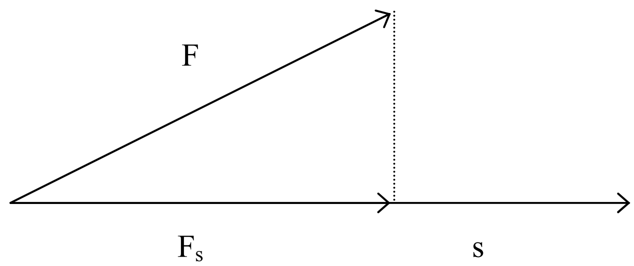
Die Koordinaten des Vektors lauten damit:

a_x = 5·cos 60° = 2,5

a_y = 5·cos 60° = 2,5

a_z = 5·cos 45° = 3,54

Das Skalarprodukt spielt in vielen naturwissenschaftlichen Formeln eine Rolle. Besonders geläufig ist die Berechnung einer Arbeit. Die einfache Formel W = F s gilt nur für den Fall, dass die Kraft entlang des Weges zeigt, den sich der beeinflusste Körper bewegt. Allgemein ist der Winkel zwischen Kraft und Weg zu berücksichtigen:



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\varphi = F_s \cdot s\,.$$

Beispiel: Die konstante Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} -10N \\ 2N \\ 5N \end{pmatrix}$ verschiebt einen Massenpunkt vom Punkt P (1m | – 5m | 3m) zum Punkt Q (0m | 1m | 4m).

Das ergibt die Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} -10N \\ 2N \\ 5N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1m \\ 6m \\ 1m \end{pmatrix} = 10Nm + 12Nm + 5Nm = 27J\,.$$

Die Arbeit ist ein Skalar. Sie besitzt keine Richtung. Kraft und Weg dagegen sind gerichtete Größen. Das Skalarprodukt ergibt also nicht nur den richtigen Zahlenwert, sondern berücksichtigt auch den Typ der Messgröße.

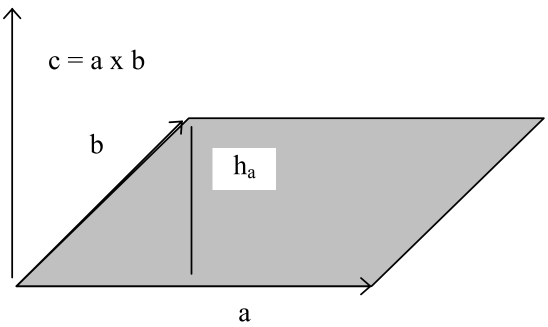
6. Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt gibt es auch eine Möglichkeit, durch Multiplikation zweier Vektoren wieder einen Vektor zu erhalten. Dies nennt man das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt:

Definition: Unter dem Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ versteht man einen Vektor mit folgenden Eigenschaften:
1) c ist sowohl zu a als auch zu b orthogonal:
2)Der Betrag von c ist gleich dem Produkt der Beträge von a und b und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.
3) a, b, c bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Nach dieser Definition beschreibt der Vektor c genau den Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms:

$$F = a \cdot h_a = a\, b \sin \alpha = c.$$



Da F gleichzeitig durch seine Richtung orthogonal zur Fläche auch die Richtung bzw. die Lage im Raum beschreibt, benutzt F als Flächenvektor zur Beschreibung des Parallelogramms.

Im Falle kollinearer Vektoren wird der Winkel φ = 0°, was zur Folge hat, dass der Betrag von c verschwindet.

Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ. Es gilt: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

Auch das Vektorprodukt lässt sich in der Koordinatenform aus den Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z\right) \times \left(b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z\right) \\
&= a_x b_x \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_x\right) + a_x b_y \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right) + a_x b_z \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_z\right) \\
&\quad + a_y b_x \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_x\right) + a_y b_y \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_y\right) + a_y b_z \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_z\right) \\
&\quad + a_z b_x \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_x\right) + a_z b_y \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_y\right) + a_z b_z \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_z\right) \\
&= 0 + a_x b_y \left(\vec{e}_z\right) + a_x b_z \left(-\vec{e}_y\right) + a_y b_x \left(-\vec{e}_z\right) + 0 + a_y b_z \left(\vec{e}_x\right) \\
&\quad + a_z b_x \left(\vec{e}_y\right) + a_z b_y \left(-\vec{e}_x\right) + 0 \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiel: Vektorprodukt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3+12 \\ -20+2 \\ 6-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -18 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Ein Vektorprodukt in der Ebene, d.h. für zweidimensionale Vektoren kann nicht definiert werden. Ebenso gibt es kein Vektorprodukt für vier- oder höherdimensionale Räume. Das Skalarprodukt dagegen existiert in jedem Vektorraum.

Weitere Beispiele:

1) Fläche eines Parallelogramms

Zwei Vektoren $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf. Wir berechnen seinen Flächeninhalt als Betrag des Kreuzproduktes:

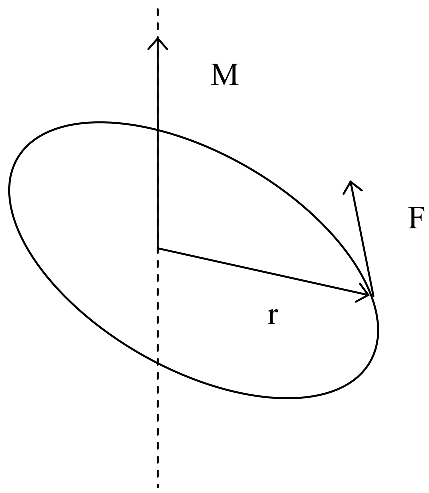
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ 2-6 \\ -18-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -24 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{36+16+576} = \sqrt{628} \approx 25{,}06 FE$$

2) Drehmoment

Eine Kraft F, die in einem Punkt P an einer Scheibe angreift und diese in Drehbewegung versetzt, bewirkt ein Drehmoment D = F x r, wobei r der Radiusvektor von der Drehachse zum Angriffspunkt P der Kraft ist. Das Drehmoment ist ein Vektor in Richtung der Drehachse, also lotrecht zu F und r. r, F und M bilden dabei in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Folglich gilt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\ .$$



Da M auch den Drehsinn beschreibt, ist hier die Richtung von M wichtig. Vertauscht man F und r in der Reihenfolge, so erhält man – M, und damit einen falschen Drehsinn.

3) Lorentzkraft

Geladene Teilchen, die sich in einem Magnetfeld bewegen, unterliegen der Lorentzkraft. Diese Situation erfüllt genau unsere Bedingungen für das Vektorprodukt. Geschwindigkeit v, magnetische Flussdichte B und Lorentzkraft F_L bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Drei – Finger – Regel). Für die Beträge gilt: $F_L = q\ v\ B$. Da die Ladung q ein Skalar ist, lässt sich diese Gleichung vektoriell in der Form $\vec{F}_L = q\ \vec{v} \times \vec{B}$ schreiben.

Beispiel: Ein Elektron fliegt mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 500m/s \\ 400m/s \\ 0 \end{pmatrix}$ durch ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2T \\ 1T \end{pmatrix}$. Mit der Ladung $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ergibt sich für die Lorentzkraft:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}4 \cdot 10^{-17} N \\ -8 \cdot 10^{-17} N \\ 16 \cdot 10^{-17} N \end{pmatrix} = 1{,}6 \cdot 10^{-17} N \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

7. Spatprodukt

Im IR^3 lässt sich eine besondere Kombination der beiden Produkte bilden, das Spatprodukt.

Definition: Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$, die nicht komplanar sind, spannen ein Spat auf. Das Volumen dieses Spats ergibt sich aus dem Spatprodukt der drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$:

$$V = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = a_x\left(b_y c_z - b_z c_y\right) + a_y\left(b_z c_x - b_x c_z\right) + a_z\left(b_x c_y - b_y c_x\right)$$

Das Spatprodukt lässt sich auch als dreireihige Determinante berechnen:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

Die Vektoren im Spatprodukt sind zyklisch vertauschbar, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Vertauscht man zwei Vektoren, so ändert sich das Vorzeichen. Verschwindet das Spatprodukt dreier Vektoren, so ist das Volumen des Spats null, d.h. die Vektoren sind komplanar oder sogar kollinear.

Beispiele: 1) Volumen eines dreiseitigen Prismas:
Das Prisma sei definiert durch die Eckpunkte
A (0;0;0), B (3;0;0); C (2;6;0) und D (0;0;8)
Dan lauten die Kantenvektoren:

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein Dreiseitiges Prismas ist ein halbes Spat, folglich gilt:

$$V = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(144 - 0\right) = 72\ RE$$

2) Volumen einer vierseitigen Pyramide mit Parallelogramm als Grundfläche:
Eckpunkte: A (2;2;2), B (4;2;8), C (7;3;5), S (3;5;5)
Die vierte Ecke D des Grundparallelogramms liegt bei

$$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$ Für das Volumen unerheblich!!

Das Volumen eines spitzen Körpers beträgt 1/3 des Spatvolumens:

$$V = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(6 + 90 + 0 - 6 - 0 - 18\right) = \frac{1}{3} \cdot 72 = 24\ RE$$

8. Matrizen

Eine Verallgemeinerung von Vektoren ergibt sich, wenn man mehrere Spalten zulässt. Wir erhalten dann Matrizen.

Definition: Ein rechteckiges Schema reeller Zahlen mit m Zeilen und n Spalten nennen wir eine $m \times n - Matrix\ A_{(m,n)}$.
Die Elemente der Matrix bezeichnen wir mit a_{ik}. Dabei ist i der Zeilenindex, k der Spaltenindex.

Beispiel: $3 \times 5\ Matrix\ A_{(3,5)}$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -0{,}6 & -3x & y \\ 2 & 0{,}5 & 3 & 2x & -y \\ 3 & -6 & -2 & x & 5y \end{pmatrix}$$

Das Element $a_{23} = 3$ steht in der zweiten Zeile und in der dritten Spalte.
Das Element in der dritten Zeile und der fünften Spalte ist $a_{35} = 5y$.

Übliche Schreibweisen zur Bezeichnung einer Matrix sind A, $A_{(m,n)}$, (a_{ik}).
In einer Nullmatrix haben alle Elemente den Wert 0.
Eine Matrix mit nur einer Spalte heißt Spaltenmatrix oder Spaltenvektor.
Eine Matrix mit nur einer Zeile heißt Zeilenmatrix oder Zeilenvektor.

Beispiele: 1) $2 \times 3 - Nullmatrix\ O$:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Spaltenvektor der Dimension 3:

$$\vec{a} = A_{(31)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2{,}5 \\ x \end{pmatrix}$$

3) Zeilenvektor der Dimension 6:

$$\vec{b} = B_{(1,6)} = \begin{pmatrix} -x & -9 & y & 3x & -0{,}4 & 3{,}2 \end{pmatrix}$$

Definition: Werden in einer Matrix A die Die Zeilen mit den Spalten vertauscht, so erhält man die Transponierte Matrix A_T, d.h.: $A_{(mn)}{}^T = (a_{ik})^T = (a_{ki}) = A_{(nm)}$.

Bei dieser Transponierung wird also die Anzahl der Spalten zur Anzahl der Zeilen und umgekehrt. Entsprechend tauschen Zeilen- und Spaltenindex ihre Rolle.

Beispiele: Wir transponieren die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Zweimaliges Transponieren ergibt wieder die Ausgangsmatrix: $\left(A^T\right)^T = A$.

Eine besondere Rolle spielen quadratische Matrizen, bei denen Zeilenzahl und Spaltenzahl übereinstimmen. Unter diesen gibt es einige spezielle Typen.

In einer n – reihigen Diagonalmatrix sind alle Elemente mit Ausnahme der Hauptdiagonalen 0:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Eine Diagonalmatrix, bei der alle Elmente der Hauptdiagonalen den Wert 1 haben, heißt Einheitsmatrix E. Es gilt dann also $a_{ii} = 1$ für alle i = 1,.., n.

Bei der Lösung von Gleichungssystemen treten Dreiecksmatrizen auf. Bei diesen sind entweder alle Elemente unterhalb oder alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen 0.

Beispiele: 3 – reihige untere Dreiecksmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

4 – reihige obere Dreiecksmatrix:

$$O = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Addition und Subtraktion

Definition: Zwei Matrizen $A_{(m,n)} = (a_{ik})$ und $B_{(m,n)} = (b_{ik})$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Elemente an gleicher Position addiert bzw. subtrahiert. Die Matrix
C = A + B mit $(c_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$ heißt Summe von A und B.
Die Matrix
D = A – B mit $(d_{ik}) = (a_{ik} - b_{ik})$ heißt Differenz von A und B.

Addition und Subtraktion sind also nur für Matrizen gleichen Typs definiert. Da hierbei letztlich nur reelle Zahlen addiert bzw. subtrahiert werden, gelten auch die meisten Rechengesetze wie Kommutativgesetz und Assoziativgesetz.

Beispiele: Gegeben sind die $3 \times 4-$*Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}5 & -2 & 7 \\ 3 & -4 & 3{,}4 & 3 \\ 4 & 6 & -2{,}4 & 4 \end{pmatrix} \quad und \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -0{,}8 & 2 & 2{,}5 \\ 17 & -5 & 3 & 0{,}7 \\ 11 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -3 & -0{,}3 & 0 & 9{,}5 \\ 20 & -9 & 6{,}4 & 3{,}7 \\ 15 & 3 & 1{,}6 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 7 & 1{,}3 & -4 & 4{,}5 \\ -14 & 1 & 0{,}4 & 2{,}3 \\ -7 & 9 & -6{,}4 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Multiplikation mit einem Skalar:</u>

Definition: Eine Matrix $A_{(m,n)}$ wird mit einer reellen Zahl λ multipliziert, indem jedes Element mit der Zahl λ multipliziert wird:
$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda\, a_{ik})$.

Beispiel: Mit den Matrizen A und B des letzten Beispiels ergibt sich:

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 & 14 \\ 6 & -8 & 6{,}8 & 6 \\ 8 & 12 & -4{,}8 & 8 \end{pmatrix} \qquad -5B = \begin{pmatrix} 25 & 4 & -10 & -12{,}5 \\ -85 & 25 & -15 & -3{,}5 \\ -55 & 15 & -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Für zwei reelle Zahlen λ und μ und zwei Matrizen A und B gleichen Typs gelten:

- Assoziativgesetz: $\lambda\,(\mu\, A) = (\lambda\, \mu)\, A$
- Distributivgesetze: $(\lambda + \mu)\, A = \lambda\, A + \mu\, A$
  $\lambda\,(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B$

Wie bei Vektoren können jetzt auch Linearkombinationen, d.h. Summen oder Differenzen von solchen Produkten gebildet werden.

Beispiel: Mit den Matrizen A und B von obern erhalten die Kombinationen:

$$M = 2A - 5B = \begin{pmatrix} 29 & 5 & -14 & 1{,}5 \\ -79 & 17 & -8{,}2 & 2{,}5 \\ -47 & 27 & -24{,}8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$N = 0{,}5A + 3B = \begin{pmatrix} 14 & -2{,}15 & 5 & 11 \\ 52{,}5 & -17 & 10{,}7 & 3{,}6 \\ 35 & -6 & 10{,}6 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Multiplikation zweier Matrizen:</u>

Zur Multiplikation zweier Matrizen A und B muss die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmen, d.h. die Matrizen sind nicht zwingend vom gleichen Typ. Auch das Ergebnis wird dann einen neuen Typ haben, Nur bei Quadratischen Matrizen sind Faktoren und Produkt im Typ überein.

Definition: Für zwei Matrizen $A_{(m,n)} = (a_{ik})$ und $B_{(n,p)} = (b_{ik})$ ergibt sich das Produkt $C_{(m,p)} = A \cdot B = (c_{ik})$ mit

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \, .$$

Das Matrixelement c_{ik} ist also das Skalarprodukt des Zeilenvektors der i – ten Zeile von A mit dem Spaltenvektor der k – ten Zeile von B. Dieses Produkt ist offensichtlich nicht kommutativ!

Beispiel: Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad und \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenvektoren von A und die Spaltenvektoren von B sind jeweils von der Dimension 3. Das Element c_{11} des Produktes $C = (c_{ik}) = AB$ ist dann das Skalarprodukt der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad und \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ also: } \quad c_{11} = 3 + 12 + 6 = 21.$$

Entsprechend ergibt sich $c_{23} = 10 + 24 + 7 = 41$.
Auf diesem Wege ergibt sich das Produkt

$$C = AB = \begin{pmatrix} 21 & 56 & 65 & 21 \\ 13 & 36 & 41 & 13 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt BA ist nicht berechenbar, da die Zeilenzahl von B nicht mit der Spaltenzahl von A übereinstimmt.

Bei quadratischen Matrizen sind zwar beide Produkte berechenbar, müssen aber nicht übereinstimmen, so dass auch dann keine Vertauschung möglich ist.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 \\ -3 & -5 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -6+9+36 & -12+45-27 & 12+18+27 \\ 6-5+8 & 12-25-6 & -12-10+6 \\ 8+2-4 & 16+10+3 & -16+4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 6 & 57 \\ 9 & -19 & -16 \\ 6 & 29 & -15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -6+12-16 & -18+20+8 & -18-8-4 \\ 3-15-8 & 9-25+4 & 9+10-2 \\ 12+9-12 & 36+15+6 & 36-6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & -30 \\ -20 & -12 & 17 \\ 9 & 57 & 27 \end{pmatrix}$$

9. Determinanten

Determinanten sind je nach Betrachtungsweise eine Rechenoperation oder eine Funktion. Sie ordnen einer reellen quadratischen Matrix eine reelle Zahl zu. Wir betrachten hier nur die Determinanten von zwei- bzw. dreireihigen Matrizen. Die Determinanten höherer Ordnung werden durch Rückführung auf dreireihige Determinanten berechnet.

Definition: Unter der Determinante einer zweireihigen quadratischen Matrix $A = (a_{ik})$ verstehen wir die Zahl

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Übliche Schreibweisen sind D, det (A), |A|, oder $|a_{ik}|$. D heißt auch zweireihige Determinante oder Determinante 2. Ordnung.

Beispiele: Wir berechnen die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}4 \\ 7 & 1{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 24 = -14$$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 16 = 12$$

$$\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 2 & 0{,}4 \\ 7 & 1{,}4 \end{vmatrix} = 2{,}8 - 2{,}8 = 0.$$

Umformungsregeln:

Regel 1: Der Wert einer zweireihigen Determinante ändert sich nicht, wenn Die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden, d.h. wenn man zur Determinante der transponierten Matrix übergeht: $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis: $$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det(A^T).$$

Daraus ergibt sich, dass alle Eigenschaften, die sich auf Zeilen einer Determinante beziehen, entsprechend auch für die Spalten einer Determinante gelten.

Regel 2: Vertauscht man die Zeilen einer zweireihigen Determinante, so ändert sie das Vorzeichen: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Beweis: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Beispiel: Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 77 = -62 \qquad \det\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 77 - 15 = 62$$

Regel 3: Werden alle Elemente einer beliebigen Zeile einer zweireihigen Determinante mit einer reellen Zahl λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix}.$$

Beispiel:

$$-0{,}2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 40 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -0{,}2 \cdot (35 + 120) = -0{,}2 \cdot 155 = -31$$

$$-0{,}2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 40 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -8 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 24 = -31$$

Regel 4: Eine zweireihige Determinante ergibt den Wert 0, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
– Alle Elemente einet Zeile sind 0.
– Beide Zeilen stimmen überein.
– Ein Zeilenvektor ist Vielfaches des anderen.

Beispiel: Folgende Determinanten ergeben den Wert 0:

$$\begin{vmatrix} 17 & -31 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 12 & 17 \\ 12 & 17 \end{vmatrix} = 204 - 204 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -18 & 51 \\ 6 & -17 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -17 \\ 6 & -17 \end{vmatrix} = -3 \cdot 0 = 0$$

Regel 5: Der Wert einer zweireihigen Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile ein Vielfaches der anderen addiert.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 26 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 13 - 3 \cdot 5 & 7 - 3 \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 4 = 9$$

Dieses Verfahren wird oft verwendet, um eine Determinante auf Dreiecksgestalt zu bringen. Diese ist dann leicht zu berechnen, denn der Wert einer Dreiecksdeterminante ist das Produkt der Hauptdiagonalen.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 17 & 21 \\ -34 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 25 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} = 510 - 0 = 510$$

Regel 6: Multiplikationstheorem:
Für zwei zweireihige quadratische Matrizen A und B gilt:
det (A·B) = det (A) · det (B).

Das Multiplikationstheorem ermöglicht es, Determinanten eines Produktes zu berechnen, ohne erst das Matrizenprodukt zu bestimmen. Dies ist oft eine erhebliche Erleichterung.

Definition: Unter der Determinante einer dreireihigen quadratischen Matrix A = (a_{ik}) verstehen wir die Zahl

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Der Term lässt sich mit Hilfe der Regel von Sarrus bestimmen. Schreibt man die ersten beiden Spalten in gleicher Reihenfolge noch einmal rechts neben die Determinante, so ergeben sich die drei zu addierenden Produkte auf den Diagonalen von links oben nach rechts unten und die drei zu subtrahierenden Produkte auf den Diagonalen von rechts oben nach links unten:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\right).$$

Beispiel: dreireihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 6 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right.$$

$$= (-4 + 30 - 84) - (70 + 48 + 3) = -58 - 121 = -179$$

Für dreireihige Determinanten gelten sinngemäß die gleichen Regeln wie für zweireihige Determinanten. Insbesondere ergibt sich der Wert einer Dreiecksdeterminante als Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Beispiele: 1) Eine Zeile ist Vielfaches einer anderen:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 7 & 11 & 13 \\ 6 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 7 & 11 & 13 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

2) Erzeugen einer Dreiecksdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{(II - 3\cdot I)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 13 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{(III + 3\cdot I)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & 14 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\overset{III + 2\cdot II}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) \cdot 19 = -133$$