Funktionen

1. Grundbegriffe

Definition: Eine Funktion ist eine eindeutige und vollständige Zuordnung, d.h. jedem Element einer Menge ID, der Definitionsmenge wird genau ein Element einer Wertemenge IW zugeordnet.

Beispiele:

1) Lineare Funktion: $f(x) = 6x + 4$
ID = IR IW = IR

2) Wurzelfunktion: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$
ID = [– 5 ; + 5] IW = [0 ; + 5]

3) Gebrochene Funktion: $f(x) = \dfrac{3x}{2x - 4}$
ID = IR \ {2} IW = IR

Bezeichnungen:
x : Unabhängige Variable oder Argument
y : abhängige Variable oder Funktionswert
ID : Definitionsmenge
IW : Wertemenge

Wir können Funktionen auf unterschiedliche Art darstellen. Diese Darstellungsformen sind nicht gleichwertig. Eine vollständige Beschreibung de Funktion erhalten wir nur durch eine analytische Darstellung. Wertetabellen und Funktionsgraphen dienen lediglich der Ermittlung konkreter Einzelwerte oder der Veranschaulichung eines Zusammenhanges.

Darstellungsformen:

1) Analytische Darstellung
Wir geben eine Funktion an durch ihre Funktionsgleichung, d.h. durch eine Rechenvorschrift, die die Berechnung der Funktionswerte f (x) aus den Werten der freien Variablen x ermöglicht. Dabei unterscheiden wir die explizite und die implizite Darstellung:

y = f (x)	Explizite Darstellung
F (x;y) = 0	implizite Darstellung
s (t) = 0,5 at^2 + v t	explizite Darstellung eines Weg – Zeit – Gesetzes
ln (y) – $2x^2$ = 0	implizite Darstellung einer logarithmischen Funktion

2) Darstellung als Wertetabelle
Einige Wertepaare werden in Form einer Tabelle angegeben. Oftmals lässt sich daraus die Funktionsgleichung rekonstruieren. Dies gilt insbesondere für aufgenommene Messreihen:

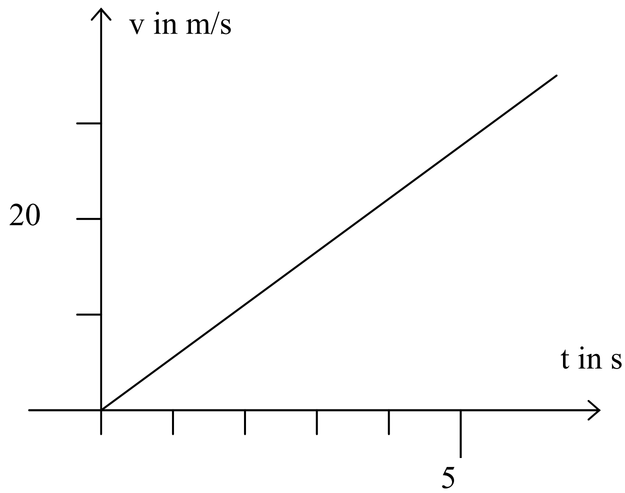
I in mA	50	100	150	200	250
U in V	2,0	3,9	5,9	8,2	10,0

In diesem Fall gilt bis auf Messungenauigkeiten: $U(I) = \frac{1}{25}\frac{V}{mA} \cdot I$

Die Angabe der Maßeinheit in der Konstanten gibt vor, in welcher Maßeinheit die Stromstärke I einzusetzen ist.

3) Graphische Darstellung

Die Wertepaare (x;y) = (x ; f(x)) können als Koordinaten für Punkte in einem Koordinatensystem interpretiert werden. Alle Wertepaare zusammen ergeben dann eine Kurve in diesem Koordinatenkreuz, den Funktionsgraphen.



Fallgeschwindigkeit als Funktion der Zeit
v (t) = gt

4) Parameterdarstellung

Bei der Beschreibung von Bewegungen ist es oft zweckmäßig, die Veränderung der einzelnen Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit zu beschreiben. Damit hat man zunächst zwei Funktionen x (t) und y (t). Dies beinhaltet aber auch die Darstellung der Bahnkurve y (x). Man spricht von einer Darstellung mit Hilfe des Parameters t.

$$x(t) = v_0 t \qquad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

führt auf die Darstellung

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = -\frac{g}{v_0^2} x^2$$

Funktionen beschreiben die Abhängigkeit einer Messgröße von einer oder mehreren anderen Messgrößen.

Beispiel 1: $t = f(x) = \frac{1}{k_3} \frac{x(2a-x)}{2a^2(a-x)^2}$ mit D(f) = {x | x ≠ a} beschreibt eine Reaktion 3. Ordnung (trimolekular). Dabei bezeichnet a die Anfangskonzentration, x die Konzentration des entstehenden Stoffes zur Zeit t und k_3 die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion.

Beispiel 2: Für die Absorption von monochromatischen Röntgenstrahlen gilt $I(x) = I_0\, e^{-\mu}$ x. Dabei ist I_0 die Anfangsintensität der Strahlung (bei x = 0) und I(x) die nach Durchstrahlung der Schichtdicke x noch vorhandene Intensität. Die Konstante μ > 0 heißt Absorptionskoeffizient des Materials, welches durchstrahlt wird. Die Halbwertsdicke d berechnet man aus der Forderung $I(d) = {}^{1}/_{2} \cdot I_0$. Man erhält $d = \ln ({}^{2}/_{\mu})$.

Beispiel 3: Bei der Rohrzuckerinversion, die ein Beispiel für eine chemische Reaktion 1. Ordnung liefert, seien zum Zeitpunkt t = 0 a Rohrzuckermoleküle vorhanden. Die als Umsatzvariable bezeichnete Größe x = x(t) gibt an, wie viele Moleküle nach Ablauf der Zeit t durch die Reaktion umgewandelt worden sind. Bei der Rohrzuckerinversion lautet die Umsatzvariable $x(t) = a\,(1 - e^{-kt})$, wobei k die Geschwindigkeitskonstante der Reaktion ist.

Beispiel 4: Die Wechselwirkung in einem diatomaren Molekül wird oft in guter Näherung durch das so genannte Morse-Potenzial beschrieben: $V(r) = D \cdot \left[1 - e^{(-a(r-r_0))}\right]^2$. Dabei bezeichnet D > 0 die Dissoziationsenergie, $r_0 > 0$ den Gleichgewichtsabstand im Molekül, r > 0 den Abstand der beiden Bindungspartner und a > 0 einen Parameter.

2. Allgemeine Funktionseigenschaften

Nullstellen:

Definition: Eine Funktion f (x) besitzt an der Stelle x_0 genau dann eine Nullstelle, wenn gilt: $f(x_0) = 0$.

In der graphischen Darstellung sind dies genau die Schnittstellen mit der x – Achse, denn alle Punkte auf der x – Achse haben die y – Koordinate 0.

Beispiele: 1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$

$x_{01/2} = 2 \pm 1$

Die Funktion besitzt zwei Nullstellen: $N_1(1\,;\,0)$ $N_2(3\,;\,0)$.

2) $f(x) = 3\cos(x - \pi/4)$

$3\cos(x_0 - \pi/4) = 0$

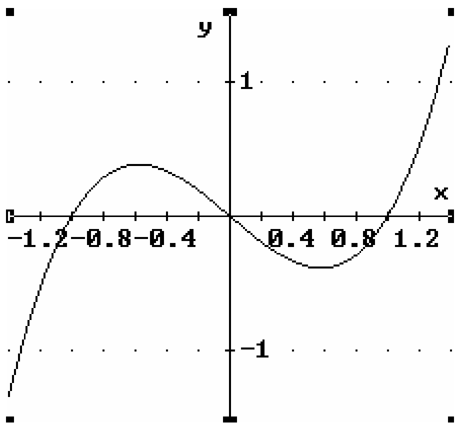
$x_{01} - \pi/4 = \pi/2 + 2k\pi$ $x_{01} = 3\pi/4 + 2k\pi$

$x_{02} - \pi/4 = 2\pi - \pi/2 + 2k\pi$ $x_{02} = 7\pi/4 + 2k\pi$

Symmetrieverhalten:

Definition: Eine Funktion f (x) mit symmetrischem Definitionsbereich ID heißt gerade, falls für alle $x \in$ ID gilt: $f(-x) = f(x)$.
Eine Funktion f (x) mit symmetrischem Definitionsbereich ID heißt ungerade, falls für alle $x \in$ ID gilt: $f(-x) = -f(x)$.

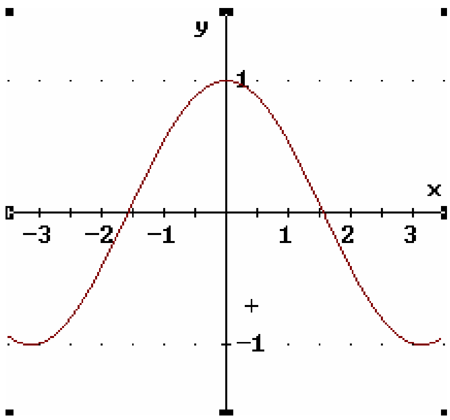
Die Funktionsgraphen einer geraden Funktion liegen im Koordinatenkreuz achsensymmetrisch zur y – Achse, die Graphen ungerader Funktionen punktsymmetrisch zum Ursprung.



Beispiele: 1) $f(x) = x^3 - x$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

Die Funktion ist ungerade.



2) $f(x) = \cos(2\pi - x)$

$f(-x) = \cos(2\pi - (-x)) = \cos(2\pi + x) = \cos(x) = \cos(2\pi - x) = f(x)$

Die Funktion ist gerade.

Alle Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit geradem Exponenten n sind gerade, mit ungeradem Exponenten n sind ungerade. Daher stammt auch die Bezeichnung.

Monotonie:

Definition: Seien x_1 , $x_2 \in$ ID und $x_1 < x_2$. Dann heißt eine Funktion f

monoton wachsend, falls gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$

streng monoton wachsend, falls gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

monoton fallend, falls gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$

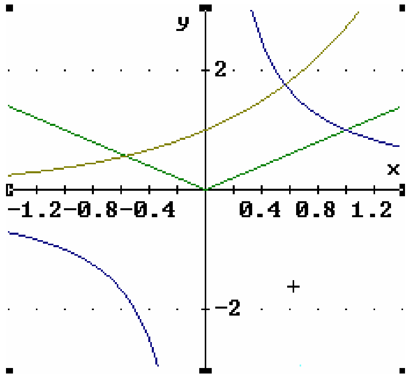
streng monoton fallend, falls gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

Bei einer monoton fallenden Funktion gehört zum größeren x – Wert stets ein kleinerer Funktionswert, bei einer wachsenden Funktion ein größerer Funktionswert.

Beispiele: 1) $f(x) = 1/x$ mit $ID = (0 ; \infty)$

Sei $x_1 < x_2$, dann gilt $f(x_1) = 1/x_1 > 1/x_2 = f(x_2)$.

Die Funktion ist also streng monoton fallend.



2) $g(x) = e^x$ mit ID = IR

Sei $x_1 < x_2$, dann gilt $f(x_1) = e^{x1} < e^{x2} = f(x_2)$.

Die Funktion ist streng monoton wachsend.

3) $h(x) = |x|$ mit ID = IR

Die Funktion ist nur abschnittsweise monoton.

Für $x \leq 0$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| > |x_2|$

Für $x \geq 0$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| < |x_2|$

Viele Funktionen sind nur abschnittsweise monoton.

Periodizität:

Definition: Eine Funktion f (x) heißt periodisch mit der Periode p, falls für alle $x \in$ ID gilt:

1) $x + p \in$ ID 2) $f(x + p) = f(x)$.

Ist p eine Periode einer Funktion f, so ist für jede ganze Zahl $k \in Z$ auch $k \cdot p$ eine Periode von f. Die kleinste Periode heißt auch primitive Periode. Wenn wir von der „der“ Periode einer Funktion f sprechen, meinen wir diese primitive Periode.

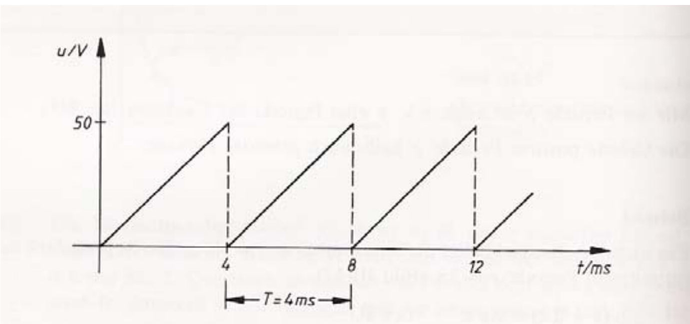
Beispiele: 1) Alle trigonometrischen Funktionen sind periodisch:

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

$\tan(x + \pi) = \tan(\pi)$ $\cot(x + \pi) = \cot(\pi)$

2) Sägezahn- oder Kippspannungen

Solche Spannungen steuern z.B. die seitliche Ablenkung des Elektronenstrahls in einem Oszilloskop oder einer Fernsehröhre.



Umkehrbarkeit:

Wir betrachten die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Dann können wir zu einem beliebigen x – Wert den zugehörigen Funktionswert f (x) bestimmen, etwa $f(x = 2) = e^2 \approx 7{,}39$. Umgekehrt können wir aber auch aus einem vorgegebenen Funktionswert den zugehörigen x – Wert zurückgewinnen, etwa $y = f(x) = 5$ führt auf $e^x = 5$ oder $x = \ln(5) \approx 1{,}61$. Dies ist aber nur möglich, weil die Zuordnung eindeutig ist. Jeder Funktionswert tritt nur einmal auf.
Betrachten wir dagegen die Funktion $g(x) = x^2$, so könne wir immer noch die Funktionswerte berechnen, etwa $f(x = -3) = 9$. Aber die Umkehrung gelingt nicht eindeutig. Sei $y = f(x) = 9$, dann ist $x^2 = 9$. Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen: $x_1 = -3$ und $x_2 = +3$. Ohne weitere Informationen ist ein Rückschluss auf den x – Wert nicht möglich. Zu zwei verschiedenen x – Werten gehört der gleiche Funktionswert.

Definition: Eine Funktion f heißt umkehrbar, falls für jedes $x \in ID$ gilt:
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

In vielen Fällen erhält man eine umkehrbare Funktion, wenn man den Definitionsbereich einschränkt. Dies gilt zum Beispiel für die quadratische Funktion $f(x) = x^2$. Setzen wir dort fest, dass $ID = IR^+$ sei, so wird die Funktion umkehrbar. Für die Bestimmung der Umkehrfunktion gibt es eine praktikable Vorgehensweise:

Schritt 1: Die Funktionsgleichung $y = f(x)$ wird nach x aufgelöst. Man erhält eine Beziehung $x = g(y)$.
Schritt 2: Man vertauscht die Variablen und erhält $y = g(x)$.
Schritt 3: Die so gewonnene Funktion bezeichnet man $y = f^{-1}(x)$ als Umkehrfunktion zu $y = f(x)$.

Beispiele: 1) $f(x) = 3x - 5$ $\qquad ID_f = IR \qquad IW_f = IR$

$$y = 3x - 5 \quad y + 5 = 3x \quad \frac{y+5}{3} = x$$

$ID_f^{-1} = IR \qquad IW_f^{-1} = IR$

$$x = g(y) = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3} \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

2) $f(x) = 4 \cdot \sqrt{2x - 8} + 12$ $\qquad ID_f = [4 ; \infty) \qquad IW_f = [12 ; \infty)$

$$y = 4 \cdot \sqrt{2x - 8} + 12$$
$$y - 12 = 4 \cdot \sqrt{2x - 8}$$
$$\left(\frac{1}{4}y - 3\right)^2 = 2x - 8$$

führt zur Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - 3\right)^2 + 4$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}y - 3\right)^2 + 4$$

mit $ID_f^{-1} = [12 ; \infty)$ $\qquad IW_f^{-1} = [4 ; \infty)$

Man beachte:

1) Der Funktionsgraph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht, wenn man den Graphen von f an der Winkelhalbierenden im I. Quadranten spiegelt.
2) Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.
Bei der Umkehrung einer Funktion tauschen Definitions- und Wertebereich ihre Rolle.

3. Konvergenz und Grenzwerte

Definition: Eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt reelle Zahlenfolge. Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots$ heißen Glieder der Folge.
Wir schreiben $< a_n > = a_1, a_2, a_3, \ldots$ ($n \in \mathbb{N}$).
Die Funktionsgleichung $a_n = f(n)$ heißt Bildungsgesetz der Folge.

Durch die Anordnung der natürlichen Zahlen ist auch die reelle Zahlenfolge geordnet, d.h. die Glieder der Folge stehen in einer sortierten Reihenfolge.

Beispiele:
1) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$
2) $\langle a_n \rangle = -2, 4, -8, 16, \ldots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = (-2)^n$
3) $\langle a_n \rangle = 1,1,2,3,5,8,13, \ldots$ Fibonacci – Folge
4) $\langle a_n \rangle = 4, 4\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 4\frac{3}{4}, 4\frac{4}{5}, \ldots$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = 5 - \frac{1}{n}$

Viele solcher Folgen nähern sich einem Wert an, dem Grenzwert der Folge.

Definition: Eine Zahl g heißt Grenzwert einer Folge $< a_n >$, falls es zu jeder beliebeigne Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$.

Beispiel: Sei $\langle a_n \rangle = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n_0 > 1 : \varepsilon$. Dann gilt: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ oder $\left|\frac{1}{n_0} - 0\right| < \varepsilon$.
Dies gilt auch für alle Zahlen $n > n_0$. Also ist $g = 0$ Grenzwert der Folge.

Definition: Eine Folge $<a_n>$ heißt konvergent, wenn sie einen endlichen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ besitzt. Wir schreiben dann: $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.
Eine Folge ohne endlichen Grenzwert heißt divergent.

Beispiele:
1) Die Fibonacci – Folge ist divergent.
2) Die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle 4 - \frac{4}{n} \right\rangle = 0, 2, 2\frac{2}{3}, 3, 3\frac{1}{5} \ldots$ konvergiert gegen $g = 4$.
3) Die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle = 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \ldots$ konvergiert gegen die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}71828$.

Wir benötigen den Grenzwertbegriff für die Beschreibung von Funktionseigenschaften. Um den Grenzwert einer Funktion definieren zu können, betrachten wir eine Folge von x – Werten und die dabei entstehende Folge von Funktionswerten.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ und $\langle x_n \rangle = \frac{1}{n}$ eine reelle Zahlenfolge. Diese Folge besitzt den Grenzwert $g = 0$. Setzen wir die diese Folgeglieder als x – Werte in die

Funktion ein, so nähern wir uns einet kritischen Stelle, nämlich x= 0. An dieser Stelle ist die Funktion nicht definiert! Es entsteht folgende Wertetabelle:

n	1	2	3	5	10	20
x_n	1	0,5	0,333	0,2	0,1	0,05
$f(x_n)$	0,8415	0,9588	0,9816	0,9933	0,9983	0,9996

Die Funktionswerte bilden also auch eine Folge, die sich offenbar dem Wert 1 nähert. Für x gegen 0 streben die Funktionswert gegen 1. Wir sprechen daher von einem Grenzwert der Funktion: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Definition: Ist eine Funktion f in einer Umgebung U einer Stelle x_0 definiert, und gilt für jede in der Definitionsmenge ID liegende Folge <x_n> mit Grenzwert x_0 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = g$, so nennen wir g den Grenzwert von f an der Stell x_0 und schreiben $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = g$.

Die Funktion f muss dazu an der Stelle x_0 selbst nicht definiert sein. Konvergieren die Funktionswerte nur für alle von rechts kommenden Folgen (d.h. $x_n > x_0$), so sprechen wir von einem rechtsseitigen Grenzwert, bei von links kommenden Folgen (d.h. $x_n < x_0$) von einem linksseitigen Grenzwert.

Beispiele: 1) f (x) = sgn (x)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \\ -1 & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ einen rechtsseitigen Grenzwert $g_R = 1$ und einen linksseitigen Grenzwert $g_L = -1$, obwohl der Funktionswert sgn(0) = 0 ist!!

2) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht definiert.
Sie besitzt dort aber sowohl den rechtseitigen als auch den linksseitigen Grenzwert g = 2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x = 2$$

Oftmals ist das Verhalten einer Funktion für besonders große x – Werte interessant, d.h. das Verhalten im Unendlichen. Dies entspricht einem Grenzwert für x gegen ∞.

Definition: Konvergiert die Folge der Funktionswerte <$f(x_n)$> für jede über alle Grenzen wachsende Zahlenfolge <x_n> gegen eine Zahl g, so heißt g der Grenzwert von f für x gegen ∞. Wir schreiben: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$.

Beispiele: 1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \cos(x) = 0$

Zur Bestimmung solcher Grenzwerte sind einige Umformungsregeln hilfreich. Es gelten folgende Grenzwertsätze:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right]$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ *für* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$

6) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n$

7) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[a^{f(x)}\right] = a^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$

8) $\lim\limits_{x \to x_0} [\log_a (f(x))] = \log_a \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)$

Diese Grenzwertsätze gelten entsprechend auch für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. Man beachte dabei aber die Gültigkeit der einzelnen Ausdrücke. Z.T. entstehen uneigentliche Grenzwerte, d.h. der Grenzwert g ist nicht endlich.

Für so genannte unbestimmte Ausdrücke vom Typ $\frac{0}{0}$ *oder* $\frac{\infty}{\infty}$ sowie $0 \cdot \infty$ gibt es Möglichkeiten mit Hilfe der Regle von Bernoulli zu einer Lösung zu kommen. Dies behandeln wir später.

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{5(x^2 - 25)}{x - 5} = 5 \cdot \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = 5 \cdot \lim\limits_{x \to 5} (x+5) = 50$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x + 3}{\cos(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x + 3)}{\lim\limits_{x \to 0} (\cos(x))} = \frac{3}{1} = 3$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 6}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \frac{6}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} 3 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{6}{x^2} = 3 - 0 = 3$

Abschließen ein Begriff, der in der Differential- und Integralrechnung eine wesentliche Rolle spielt.

Definition: Eine in x_0 und einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt stetig in x_0, falls der Grenzwert von f in x_0 existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle x_0 übereinstimmt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Anschaulich bedeutet das, der Funktionsgraph lässt sich ohne absetzen des Stiftes durchzeichnen. Die Sgn – Funktion ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig, ebenso die Tangensfunktion an der Stelle $x_0 = \pi/2$.

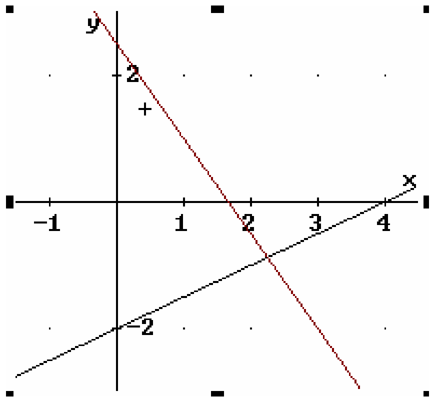
4. Lineare Funktionen

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = mx + n$ heißt lineare Funktion.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Der Parameter m bezeichnet die Steigung der Geraden, n den y – Achsenabschnitt.

Beispiele: 1) $f(x) = 0{,}5\,x - 2$
schneidet die y – Achse in $Y_f\,(0|-2)$
mit der Steigung $m_f = 0{,}5$

2) $g(x) = -3/2\,x + 2{,}5$
schneidet die y – Achse in $Y_g\,(0 \mid 2{,}5)$
mit der Steigung $m_g = -3/2$



Bestimmung der Nullstellen:

$f(x) = m\,x + n$ besitzt Nullstellen für $f(x_N) = 0$, d.h. $m\,x_N + n = 0$. Dies führt auf die Lösung

$$x_N = -\frac{n}{m}$$

Bestimmung der Funktionsgleichung aus zwei Punkten:

Gegeben seien die Punkte $P_1\,(x_1 \mid y_1)$ und $P_2\,(x_2 \mid y_2)$. Dann ergeben sich zwei Gleichungen:

I $\qquad y_1 = m\,x_1 + n$
II $\qquad y_2 = m\,x_2 + n$

Subtraktion führt auf $\qquad y_1 - y_2 = m\,x_1 - m\,x_2$

also auf $\qquad m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Durch einsetzen ergibt sich dann auch $n = y_1 - \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1$

Beispiel: $P_1\,(4 \mid 9)$ $\quad P_2\,(-2 \mid -3)$
I $\qquad 9 = 4\,m + n$
II $\qquad -3 = -2\,m + n$
$12 = 6\,m \qquad m = 2 \qquad n = 9 - 4 \cdot 2 = 1$
$f(x) = 2\,x + 1$

Man beachte: $y = 3$ beschreibt eine Gerade parallel zur x – Achse. Diese besitzt die Steigung $m = 0$ und den Achsenschnittpunkt $Y\,(0 \mid 3)$.
Sie ist Graph der konstanten Funktion $f(x) = 3$.
Diese besitzt jedoch keine Umkehrfunktion.

$x = 3$ beschreibt eine Gerade parallel zur y – Achse. Eine Steigung lässt sich nicht angeben. Sie schneidet die x – Achse in $X\,(3 \mid 0)$.
Sie ist kein Funktionsgraph!

Spezielle Formen der Geradengleichung:

Punkt – Steigungs – Form: Die Gleichung einer Geraden durch den Punkt P (x_1 | y_1) mit der Steigung m lautet: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

Zwei – Punkte – Form: Die Gleichung einer Geraden durch zwei verschiedne Punkte P_1 (x_1 | y_1) und P_2 (x_2 | y_2) lautet: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Achsenabschnittsform: Die Gerade mit der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten X (a | 0) und Y (0 | b).

Bestimmung einer Prallelen und einer Orthogonalen:

Die Steigung einer Parallelen zur Gerade g mit der Steigung m ist ebenfalls m: $m_{\|} = m$.

Die Steigung einer Orthogonalen zur Geraden g mit der Steigung m ist: $m_{\perp} = -\frac{1}{m}$.

Beispiel: g : y = 3 x + 5
Parallele durch P (0 | – 2) $g_{\|}$: y = 3 x – 2
Orthogonale durch P (0 | – 2) $g_{\perp}$: y = – 1/3 x – 2

Steigungswinkel:

Die Steigung m beinhaltet den Steigungswinkel der Geraden, d.h. den Schnittwinkel mit der x – Achse. Es gilt: tan (α) = m

Beispiel: y = 2,5 x – 4
m = 2,5 tan (α) = 2,5 α = arctan (2,5) = 68,2°

Anwendungsbeispiele:

1) Geschwindigkeit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung: Ein PKW (v_0 = 72 km/h) beginnt einen Überholvorgang und beschleunigt mit a = 3,6 m/s^2 :
v (t) = 3,6 m/s^2 · t + 20 m/s.

2) Die Spannung an einem Widerstand R in Abhängigkeit von der Stromstärke I:
U (I) = R · I

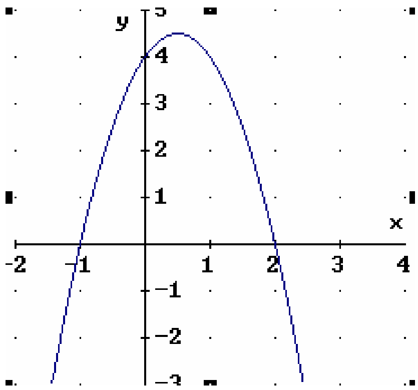
5. Quadratische Funktionen

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt quadratische Funktion.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$. Die Parabel schneidet die y – Achse im Punkt Y (0 | c).

Scheitelpunktsbestimmung:

Jede Parabelgleichung lässt sich in die Scheitelpunktsform $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ bringen. Daraus ergibt sich der Scheitelpunkt zu $S\,(x_S \mid y_S)$.



$f(x) = -2x^2 + 2x + 4$
führt auf die Parabel
$y = -2x^2 + 2x + 4$
$y = -2\,(x^2 - x - 2)$
$y = -2\,[x^2 - x + 0{,}25 - 0{,}25 - 2]$
$y = -2\,[(x - 0{,}5)^2 - 0{,}25 - 2]$
$y = -2\,(x - 0{,}5)^2 + 4{,}5$
Scheitelpunkt: S (0,5 | 4,5)

Bestimmung einer Parabel aus drei Punkten:

A (– 3 | – 10) B (1 | – 10) C (4 | 32)
liefert drei Gleichungen:

I	$-10 = 9a - 3b + c$
II	$-10 = a + b + c$
III	$32 = 16a + 4b + c$

I – II	$0 = 8a - 4b$	$\Rightarrow$	$b = 2a$
I – III	$-42 = -7a - 7b$		

Einsetzen liefert:	$-42 = -7a - 14a = -21a$
Ergebnis: $a = 2$	$b = 4$ $c = -16$
Gesuchte Funktion:	$f(x) = 2x^2 + 4x - 16$

Nullstellen und Produktform:

Eine Parabel kann die x – Achse in zwei Punkten schneiden, in einem Punkt berühren oder nicht berühren.

Beispiele: 1) $y = 2x^2 - 12x + 16$ besitzt zwei Nullstellen:
$0 = x^2 - 6x + 8$
$x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$.
$x_1 = 2$ $x_2 = 4$
2) $y = 3x^2 + 24x + 48$ berührt die x – Achse in N (– 4 | 0):
$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-16} = -4$ doppelte Nullstelle
3) $y = x^2 - 3x + 12$ besitzt keine Nullstelle: $x_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{-9{,}75}$.

Im Falle zweier Nullstellen lässt sich die Parabelgleichung in die Produktform bringen:

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Man spricht auch vom Zerlegen des Funktionsterms in Linearfaktoren. Im Beispiel 1) ergibt sich:

$$y = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$$

Im Falle des Berührens, einer doppelten Nullstelle entsteht ein Binom im Funktionsterm, wie im Beispiel 2):

$$y = 3(x + 4)^2$$

<u>Anwendungsbeispiele:</u>

1) Die kinetische Energie E_{kin} eines Körpers hängt quadratisch von der Geschwindigkeit v des Körpers ab: $E_{kin}(v) = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

2) Beim schrägen Wurf besteht die Bewegung aus einer Überlagerung zweier Teilbewegungen.
Horizontal: gleichförmig mit x (t) =v_0 cos (α) · t
Vertikal: beschleunigt mit y (t) = v_0 sin (α) · t – 0,5 t^2
Um die tatsächliche Flugbahn zu bekommen, kann man die erste Gleichung nach t auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen:

$$y(x) = v_0 \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cos\langle\alpha\rangle} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\langle\alpha\rangle} \right)^2 = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

Mit g ≈ 10 m/s^2 , α = 30° und v_0 = 20 m/s ergibt sich dann:

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x - \frac{1}{60} \cdot x^2 = x \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{60} \cdot x \right)$$

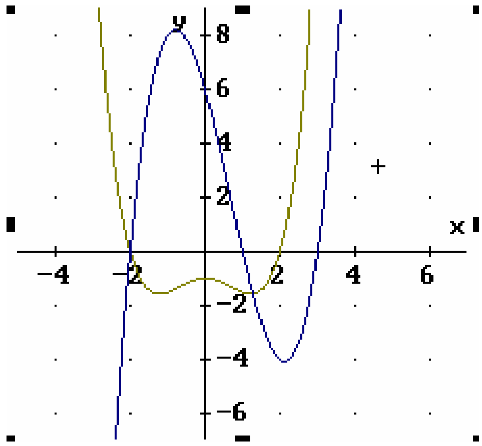
Daraus kann man jetzt die Wurfweite berechnen. Der Auftreffpunkt auf dem Boden entspricht einer Nullstelle, also: $x_1 = 0$ und $x_2 = 34{,}64$ m

6. <u>Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)</u>

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ mit reellen Koeffizienten a_k und $n \in IN$ heißt ganzrationale Funktion oder Polynomfunktion vom Grade n.

Beispiele: 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
ist eine Funktion dritten Grades

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 1$
ist eine Funktion vierten Grades



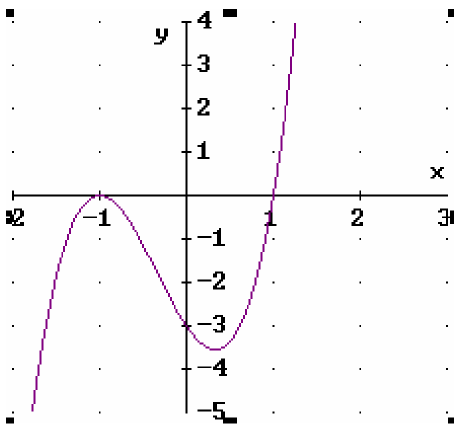
<u>Nullstellenbestimmung:</u>

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
$0 = x_N^3 - 2x_N^2 - 5x_N + 6$
Durch Probieren findet man $x_1 = 1$.
Durch Polynomdivision wird ein Linearfaktor abgespalten:
$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$
Dann lautet der Funktionsterm:
$f(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (x - 1)$
Die Gleichung zur Bestimmung der Nullstellen lautet jetzt:
$0 = (x^2 - x - 6) \cdot (x - 1)$
Solche Produktgleichungen haben wir durch Betrachtung der einzelnen Faktoren gelöst.
Hier bleibt uns zu lösen:
$0 = x^2 - x - 6$
$x_{2/3} = 0{,}5 \pm 2{,}5$ $\quad x_2 = 3$ $\quad x_3 = -2$
Die vollständige Produktdarstellung der Funktion lautet also:
$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$.

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - 1$ $\qquad 0 = \frac{1}{4}x_N^4 - \frac{3}{4}x_N^2 - 1$
Dies ist eine biquadratische Gleichung, die wir direkt lösen können:
$z^2 - 3z - 4 = 0$ $\quad z_{1/2} = 1{,}5 \pm 2{,}5$ $\quad z_1 = -1$ $\quad z_2 = 4$
Das liefert zwei Nullstellen: $\quad x_{N1} = -2$ $\quad x_{N2} = +2$

Eine Polynomfunktion vom Grad n besitzt höchstens n reelle Nullstellen. Sie besitzt genau n komplexe Nullstellen. Doppelte Nullstellen bezeichnen immer einen Berührpunkt mit der x – Achse.

Beispiel: $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3$
$f(x) = 3(x + 1)^2 (x - 1)$
Daher besitzt die Funktion eine doppelte Nullstelle in $N_{1/2}(-1 \mid 0)$ und eine einfache Nullstelle in $N_3(1 \mid 0)$.
In $(-1 \mid 0)$ wird die x – Achse lediglich berührt, in $(1 \mid 0)$ geschnitten.



Zur Nullstellenbestimmung kann auch das Horner – Schema verwendet werden.

Bestimmung einer Polynomfunktion aus gegebenen Punkten:

Man bestimme eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Funktionsgraph durch die Punkte M (1 | 6,5), N (– 1 | 7,5), O (– 3 | 12,5) und P (– 4 | 9) verläuft.

Wir setzen die Punkte in die Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ einer Polynomfunktion dritten Grades ein:

I	$6{,}5 = a + b + c + d$
II	$7{,}5 = -a + b - c + d$
III	$12{,}5 = -27a + 9b - 3c + d$
IV	$9 = -64a + 16b - 4c + d$

Das entstandene LGS lösen wir nicht mit dem Gauß – Algorithmus, da hier ein einfacherer Weg erkennbar ist:

I–II	$-1 = 2a + 2c$	$c = -a - 0{,}5$
I–III	$-6 = 28a - 8b + 4c$	
I–IV	$-2{,}5 = 65a - 15b + 5c$	

Einsetzen von c in die letzten beiden Gleichungen liefert:

III’’	$-4 = 24a - 8b$	
IV’’	$0 = 60a - 15b$	$b = 4a$

Einsetzen in III’’: $-4 = 24a - 32a$ $\quad a = 0{,}5$

Damit erhalten wir für die restlichen Koeffizienten:

$b = 4a = 2$ $\quad c = -a - 0{,}5 = -1$ $\quad d = 5$

Die gesuchte Polynomfunktion lautet:

$f(x) = 0{,}5x^3 + 2x^2 - x + 5$

Zur Bestimmung einer Polynomfunktion eignet sich auch das Interpolationspolynom von Newton in Verbindung mit dem Steigungsschema.

7. Gebrochenrationale Funktionen

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ mit ganzrationalen Funktionen z(x) und n(x) heißt gebrochenrationale Funktion.

Ist der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners, so sprechen wir von einer unecht gebrochenrationalen Funktion. Gebrochenrationale Funktionen besitzen einen eingeschränkten Definitionsbereich, da der Nenner nicht 0 werden darf.

Beispiele: 1) $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ID = IR \ {0}

Der Funktionsgraph ist eine Hyperbel.

2) $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{3x+2}{(x-1)(x-3)}$ ID = IR \ {1 ; 3}

3) $f(x) = \frac{2x^2-4x+4}{x+5}$ ID = IR \ {– 5}

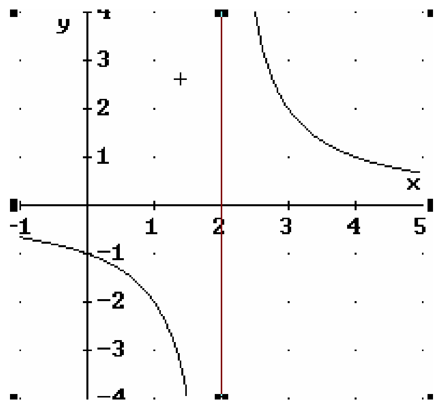
ist eine unecht gebrochenrationale Funktion

Nullstellen:

Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion sind die Nullstellen des Zählerpolynoms. Damit reduziert sich die Nullstellenbestimmung auf bereits bekannte Verfahren.

Definitionslücken und Polstellen:

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Definitionslücken der gebrochenrationalen Funktion. Ist eine solche Lücke gleichzeitig eine Nullstelle des Zählerpolynoms, so entsteht eine behebbare Lücke, andernfalls eine Polstelle. Die Funktionswerte wachsen in der Nähe einer Polstelle über alle Grenzen.



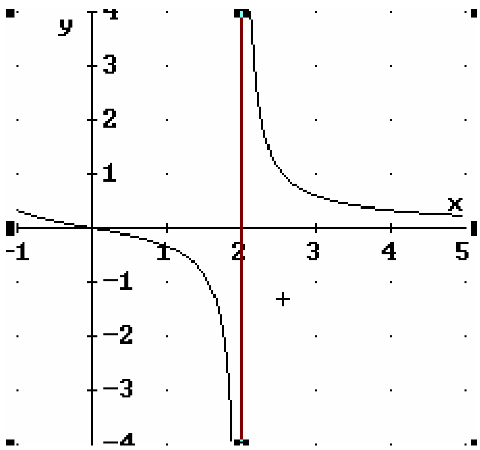
Beispiel: $f(x) = \frac{2}{x-2}$ ID = IR \ {2}

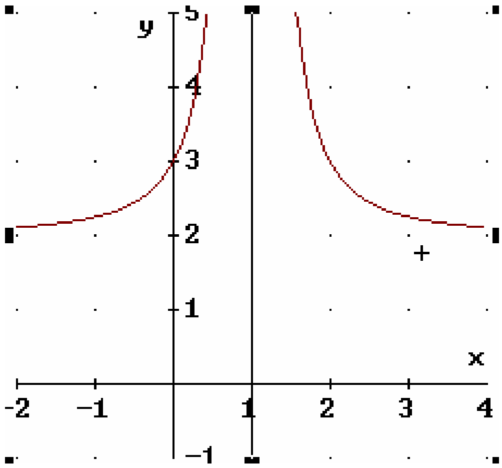
besitzt bei $x_P = 2$ eine Polstelle.
Bei Annäherung von links fallen die Funktionswerte gegen – ∞, von rechts wachsen sie nach + ∞.

In der Regel entstehen wie im letzten Beispiele solche Polstellen mit Vorzeichenwechsel. Tritt eine Nullstelle des Nennerpolynoms doppelt auf, so entsteht ein Pol ohne Vorzeichenwechsel.

Beispiele: Die folgenden Graphen zeigen die Funktionen

$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2-2x+1} + 2$





Asymptoten:

Die Funktionsgraphen gebrochenrationaler Funktionen nähern sich in den meisten Fällen einer Geraden an, falls die x – Werte ins Unendliche wachsen. Diese Gerade nennen wir eine Asymptote der Funktion.

Jede echt gebrochenrationale Funktion nähert sich der x – Achse, d.h. ist f echt gebrochen, so gilt: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

Eine unecht gebrochene Funktion lässt sich durch Polynomdivision zerlegen in eine Summe aus einer Polynomfunktion a (x) und einem echt gebrochenen Restglied: f (x) = a (x) + r (x). Ist die Polynomfunktion a (x) linear, so sprechen wir von einer echten Asymptote.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ ID = IR \{1}

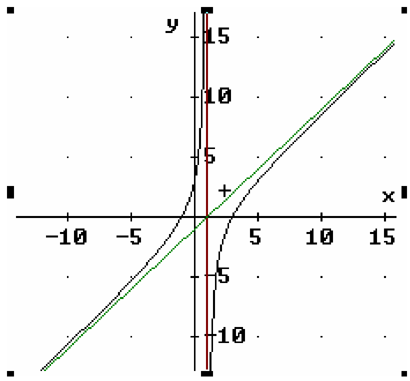
besitzt bei $x_P = 1$ eine echte Polstelle

Nullstellen: $N_1\ (-1 | 0)$ $N_2\ (3 | 0)$

Die Asymptote erhalten wir durch Polynomdivision:

$(x^2 - 2x - 3) : (x - 1) = x - 1 + \dfrac{-4}{x-1}$

Die Funktion nähert sich also der Asymptote a (x) = x – 1.



8. Kegelschnitte und Wurzelfunktionen

Kegelschnitte entstehen als Schnittgebilde zwischen einem Kegel und einer Ebene. Im Einzelnen können je nach Lage der Ebene ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel entstehen. Kegelschnitte werden beschrieben durch algebraische Gleichungen des folgenden Typs:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dx + E = 0 \quad (1)$$

In Abhängigkeit von den Koeffizienten A und B ergeben sich jetzt die verschiedenen Kegelschnitte. Diese Gleichung lässt sich aber nicht mehr eindeutig nach y auflösen, ist also nicht mehr als Funktion interpretierbar. Dazu muss die Kurve auf ihre eine Hälfte eingeschränkt werden.

Der Kreis:

Im Falle eines Kreises ist in der Gleichung (1) A = B. Die Gleichung lässt sich dann in die Hauptform der Kreisgleichung umwandeln:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \qquad M\,(x_M \mid y_M).$$

Beispiel: $3x^2 + 3y^2 - 12x - 24y + 12 = 0$
A = B = 3 , daher ein Kreis.
$x^2 - 4x + y^2 - 8y = -4$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = -4 + 4 + 16$
$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$
Beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M (2 | 4) und dem Radius r = 4.

Die Gleichung des Kreises ist keine Funktion. Um dies zeigen, lösen wir die Gleichung nach y auf:

$$(y - 4)^2 = 16 - (x - 2)^2$$
$$y = 4 + \sqrt{16 - (x - 2)^2}$$

Diese letzte Zeile können wir interpretieren als $f(x) = 4 + \sqrt{16 - (x - 2)^2}$. Dies ist eine Funktion, ihr Funktionsgraph aber nur der obere Halbkreis. In der Kreisgleichung gibt es zu jedem x – Wert 2 y – Werte, die die Gleichung erfüllen. Die Zuordnung ist also nicht eindeutig. In der Funktionsgleichung ist die Zuordnung eindeutig, dafür wird aber nur der halbe Kreis beschrieben. Die untere Hälfte beschreibt dann die Funktion $f_u(x) = 4 - \sqrt{16 - (x - 2)^2}$.

Als Funktion ist eine Wurzelfunktion entstanden. Diese lassen sich wie folgt definieren:

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = q\sqrt{g(x)}$ mit einer ganzrationalen Funktion g(x) heißt Wurzelfunktion.

Solche Wurzelfunktionen beschreiben also unter anderem Kreise, aber auch andere Graphen, wie wir noch sehen werden. Wurzelfunktionen haben stets einen eingeschränkten Definitionsbereich, da der Radikand nicht negativ werden darf. In unserem Beispiel ist ID = [– 2 ; 6].

Beispiel: $f(x) = 5 + \sqrt{-x^2 + 6x + 40}$ beschreibt einen Kreis, denn

$$f(x) = 5 + \sqrt{-(x-3)^2 + 49} = 5 + \sqrt{49 - (x-3)^2}$$

$$y - 5 = \sqrt{49 - (x-3)^2} \qquad \text{ID} = [-4\,;\,10]$$

$$(y-5)^2 = 49 - (x-3)^2$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 49$$

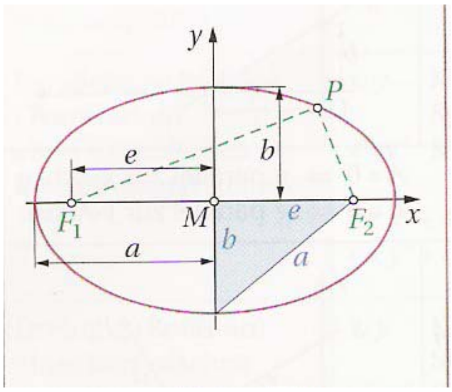
M (3 | 5) r = 7

Die Ellipse:

Eine Ellipse entsteht, falls in Gleichung (1) das Produkt A·B > 0 ist. Dies schließt einen Kreis ein. Für A = B gilt nämlich: $A \cdot B = A^2 > 0$. Der Kreis ist ein Sonderfall der Ellipse. Eine Ellipsengleichung lässt sich dann umstellen in die Hauptform der Ellipsengleichung:

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1 \qquad M\,(x_M \mid y_M).$$

M bezeichnet auch hier den Mittelpunkt. Eine Ellipse hat zwei Halbachsen a und b, die den Abstand der Scheitelpunkte zum Zentrum M angeben, und zwei Brennpunkte. Den Abstand des Mittelpunktes M von einem der Brennpunkte bezeichnet man als Brennweite oder Exzentrizität e.



Es gilt: $e^2 = a^2 - b^2$

Die Ellipse ist auch definiert als die Ortslinie aller Punkte deren Abstandssumme zu den beiden Brennpunkten konstant ist: $PF_1 + PF_2 = 2a$.

Das Auflösen der Ellipsengleichung führt zur Funktion:

$$f(x) = y_m \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x - x_M)^2}\ .$$

Dabei entstehen wieder zwei Funktionen, die jeweils eine halbe Ellipse als Funktionsgraph besitzen. Für a = b entsteht ein Kreis mit dem Radius r = a = b.

Beispiel: $16\,x^2 + 25\,y^2 + 32x - 150y - 159 = 0$ beschreibt eine Ellipse, denn A·B = 4·5·> 0. Es ergibt sich:

$$16 \cdot (x^2 + 2x) + 25 \cdot (y^2 - 6y) = 159$$

$$16 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 25 \cdot (y^2 - 6y + 9) = 159 + 16 + 225\,.$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

Dies ist eine Ellipse mit Mittelpunkt M (– 1 | 3) und den Halbachsen a = 5 und b = 4. Die zugehörige Funktion für die obere Hälfte lautet:

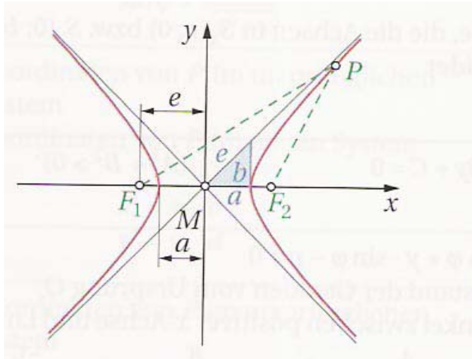
$$f(x) = 3 + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{25 - (x+1)^2} \qquad \text{ID} = [-6\,;\,4]$$

Die Hyperbel:

Eine Hyperbel entsteht, falls in Gleichung (1) das Produkt A·B < 0 ist. Man erhält als Hauptgleichung:

$$\frac{(x-x_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1 \qquad M\ (x_M \mid y_M).$$

Der Mittelpunkt M ist hier nur noch als Symmetriezentrum der Figur zu verstehen. Die Exzentrizität oder Brennweite e ist wieder der Abstand der Brennpunkte zu diesem Symmetriezentrum. Die große oder reelle Halbachse a bezeichnet den Abstand der Scheitelpunkte vom Zentrum M.



Es gilt: $e^2 = a^2 + b^2$

Die Hyperbel ist die Ortslinie aller Punkte deren Abstandsdifferenz zu den zwei Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist: $|PF_1 - PF_2| = 2a$.

Die zugehörigen Funktionsgleichungen lauten:

$$f(x)=y_M \pm \frac{b}{a}\sqrt{(x-x_M)^2-a^2}\ .$$

Diese Funktionen sind definiert für $|x - x_M| \geq a$, d.h. nicht definiert zwischen den Scheitelpunkten.

Eine Hyperbel besitzt zwei Asymptoten mit den Gleichungen $a(x)=y_M \pm \frac{b}{a}(x-x_M)$. Die Steigungen der Asymptoten sind $\pm\frac{b}{a}$. Für den Sonderfall a = b stehen die Asymptoten also aufeinander senkrecht.

Beispiel: $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$ beschreibt eine Hyperbel mit A·B = – 36 < 0. Es ergibt sich:

$$4(x^2-4x)-9(y^2+2y)=29$$

$$4(x^2-4x+4)-9(y^2+2y+1)=29+16-9 \quad M\ (2 \mid -1).$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$$

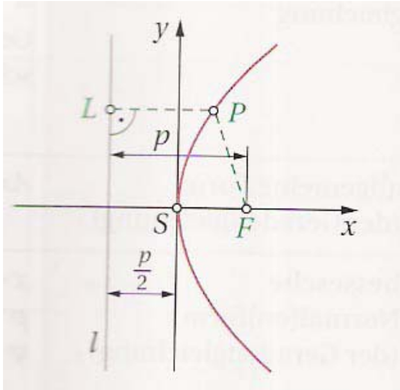
Die Funktionen lauten dann: $f(x)=-1\pm\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9}$ ID = IR \ (– 1 ; 5).

Die Parabel:

Eine Parabel entsteht, falls in Gleichung (1) genau eine der Zahlen A und B gleich 0 ist. Ist B = 0, so liegt die Parabel wie üblich mit der Öffnung nach oben oder unten im Koordinatenkreuz, für A = 0 liegt sie seitlich mit der Öffnung nach rechts oder links. Damit ergibt sich als Hauptform der Parabelgleichung:

$$(y-y_S)^2=2p(x-x_S) \quad \textit{bei seitlicher Lage}\,.$$

Der Punkt S bezeichnet in diesem Fall den Scheitelpunkt. Die Parabel ist dabei definiert als Ortslinie aller Punkte P, die von einem festen Punkt F, dem Brennpunkt, und einer festen Geraden l, der Leitgeraden, den gleichen Abstand besitzen. Die Brennweite e ist der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie, der Scheitelpunkt liegt auf halber Strecke zwischen F und der Leitlinie l.



Die zugehörigen Funktionen für den oberen bzw. unteren Ast der Parabel lauten:

$$f(x) = y_S \pm \sqrt{2p(x - x_S)}$$

Diese Funktionen sind nur definiert für $x \geq x_S$ falls p positiv und damit die Parabel nach rechts geöffnet ist, bzw. für $x \leq x_S$ falls p negativ und die Parabel nach links geöffnet ist.

Beispiel: $y^2 + 2x + 4y + 10 = 0$ ist eine Parabelgleichung, da A = 0 ist.
Es ergibt sich:

$$y^2 + 4y = -2x - 10$$

$$(y+2)^2 - 4 = -2x - 10 \qquad S\,(-3 \mid -2) \text{ nach links geöffnet mit } p = -1.$$

$$(y+2)^2 = -2(x+3)$$

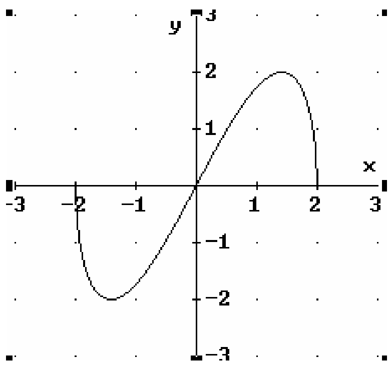
Die Funktionen lauten: $f(x) = -2 \pm \sqrt{-2(x+3)}$ ID = $(-\infty\,; -3]$.

Leitgerade: $x = -2{,}5 = x_S - p/2$.

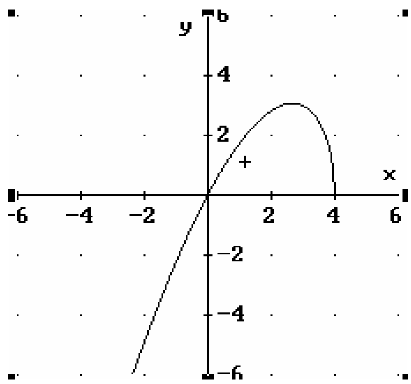
<u>Weitere Wurzelfunktionen:</u>

Wurzelfunktionen beschreiben eine Vielzahl von gekrümmten Flächen, z.B. auch Tragflächenprofile.

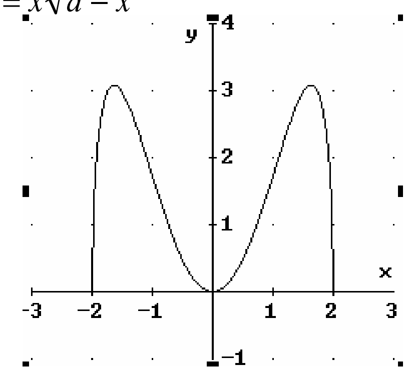
Beispiele:



$f(x) = x\sqrt{a - x^2}$



$f(x) = x\sqrt{a - x}$



$f(x) = x^2\sqrt{a - x^2}$

9. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = f_0 \cdot a^{kx}$ heißt Exponentialfunktion.

Exponentialfunktionen beschreiben Wachstums- und Zerfallsprozesse ebenso wie Absorptionsvorgänge. Sie spielen daher in Naturwissenschaft und Technik eine besondere Rolle. Jede beliebige Exponentialfunktion mit einer Basis a lässt sich stets umschreiben in eine Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl e als Basis (natürliche Exponentialfunktion).

Beispiel: $5 = e^{\ln(5)}$, daher gilt: $f(x) = 5^x = e^{\ln(5)\,x}$.

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich natürliche Exponentialfunktionen, da es üblich ist alle Vorgänge mit Hilfe solcher Funktionen in der Form $f(x) = f_0\, e^{kx}$ zu beschreiben.

Typisch für exponentielle Wachstums- oder Zerfallsprozesse ist die gleich bleibende Verdoppelungs- bzw. Halbwertszeit. Unabhängig von der bereits verstrichenen Prozessdauer und dem Anfangswert verdoppelt bzw. halbiert sich der Funktionswert immer in gleich bleibenden Intervallen.

Wachstumsfunktionen:

Für k > 0 beschreibt die Funktion einen Wachstumsprozess, sie ist streng monoton wachsend und nähert sich für $x \to -\infty$ der x – Achse asymptotisch an.

Beispiele: 1) Wachstum einer Bakterienkultur:
Anfangszahl: $B_0 = 5000$ Individuen.
Die Bakterienanzahl verdoppelt sich jede halbe Stunde.
Für die Verdoppelungszeit gilt:

$$2B_0 = B_0 \cdot e^{kt_D} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = e^{kt_D}$$

$$\ln(2) = kt_D \quad \Leftrightarrow \quad t_D = \frac{\ln(2)}{k}.$$

Damit erhalten wir $k = \ln(2) : t_D = 1{,}4$ und die Wachstumsfunktion
$B(t) = 5000\, e^{1{,}4\,t}$, wobei t in h einzusetzen ist.
2) Kapitalwachstum mit Zinseszinseffekt:
Anfangskapital: 10.000,- €; Zinssatz: p = 4%

Dann gilt: $K(t) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 10.000€ \cdot 1{,}04^t = 10.000€ \cdot e^{0{,}039 \cdot t}$.

Bei Zinsberechnungen ist allerdings die Schreibweise mit der natürlichen Exponentialfunktion unüblich.
Verdoppelungszeit: $t_D = \ln(2) : 0{,}039 \approx 17{,}67$ Jahre.

Abklingfunktionen

Für k < 0 beschreibt die Funktion einen Zerfalls- oder Absorptionsprozess, sie ist dann streng monoton fallend und nähert sich für $x \to +\infty$ der x – Achse asymptotisch an.

Beispiel: Radioaktiver Zerfall:
Anfangszahl: $N_0 = 2 \cdot 10^6$ Kerne; Zerfallskonstante: $k = 0{,}03\ ^{s-1}$
$N(t) = 2 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}03\,t}$, wobei t in s einzusetzen ist.
Hierbei schreibt man üblicherweise das Minuszeichen explizit in den Exponen-

ten und arbeitet mit einer positiven Zerfallskonstante k. Für die Halbwertszeit gilt dann:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{-kt_H} \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kt$$

$$t_H = \frac{\ln\left(1/2\right)}{-k} = \frac{\ln(2)}{k}$$

Sättigungsfunktionen

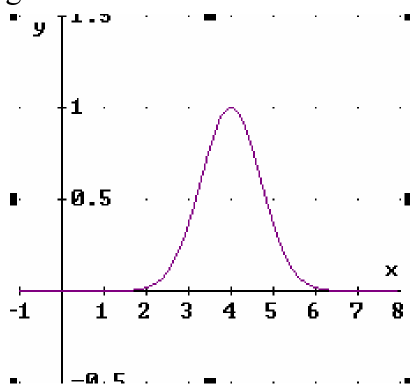
Oft streben Messwerte einem Maximalwert entgegen. Dabei nimmt die Zunahme der Messgröße beständig ab je näher sie ihrem Sättigungswert kommt. Solche Vorgänge werden beschrieben durch Funktionen der Form $f(x) = f_0\left(1 - e^{-kx}\right)$, wobei die Konstante k dann stets positiv ist.

Beispiel: Aufladung eines Kondensators $q(t) = Q_{\max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

Gaußsche Glockenkurve:

Die Gaußfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen. Ihr Funktionsgraph hat die Form einer Glocke. In der Regel liegt die Kurve symmetrisch zur y – Achse. Dann gilt:

$$f(x) = q \cdot e^{-x^2}.$$



Bei seitlicher Verschiebung der Symmetrieachse auf die Gerade $x = x_0$ muss der allgemeinere Ansatz

$$f(x) = q \cdot e^{-b(x-x_0)^2}$$

gewählt werden.

Logarithmusfunktionen:

Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen sind die Logarithmusfunktionen.

Definition: Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = f(x) = q \cdot \log_b(x)$ heißt Logarithmusfunktion.

Es gilt dabei:

$$y = f_0 \cdot e^{kx} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{f_0}\right) : k = x$$

$$f(x) = f_0 \cdot e^{kx} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{f_0}\right) : k$$

Logarithmen werden hauptsächlich zum Lösen von Exponentialgleichungen benötigt.

10. Trigonometrische Funktionen und Arcusfunktionen

Definition: Eine Funktion, deren Funktionsgleichung aus trigonometrischen Termen aufgebaut ist, heißt trigonometrische Funktion.

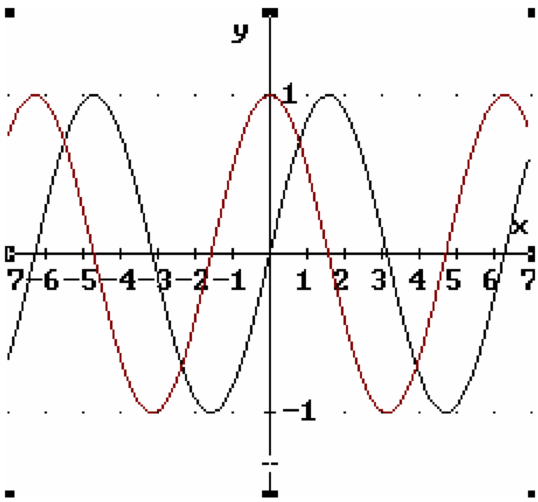
Die elementaren trigonometrischen Funktionen sind:

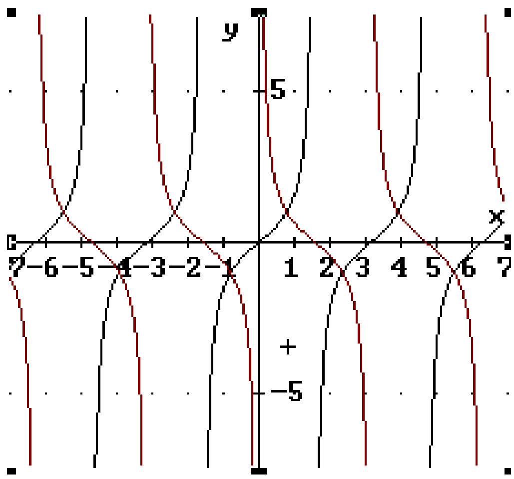
$$f(x) = \sin(x) \quad g(x) = \cos(x) \quad h(x) = \tan(x) \quad i(x) = \cot(x).$$

Diese Funktionen sind periodisch mit einer Periode p. Dadurch wiederholen sich auch die Nullstellen Maxima und Minima periodisch. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Eigenschaften dieser Funktionen ($k \in Z$):

	sin (x)	cos (x)	tan (x)	cot (x)
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$	$IR \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$	$IR \setminus \{k\pi\}$
Wertebereich	$-1 \leq y \leq +1$	$-1 \leq y \leq +1$	$-\infty < y < +\infty$	$-\infty < y < +\infty$
Periode	2π	2π	π	π
Symmetrie	ungerade	gerade	ungerade	ungerade
Monotonie	–	–	Streng wachsend	Streng fallend
Nullstellen	$x_{Nk} = k\pi$	$x_{Nk} = \pi/2 + k\pi$	$x_{Nk} = k\pi$	$x_{Nk} = \pi/2 + k\pi$
Relative Maxima	$x_{Nk} = \pi/2 + 2k\pi$	$x_{Nk} = 2k\pi$	–	–
Relative Minima	$x_{Nk} = 3\pi/2 + 2k\pi$	$x_{Nk} = \pi + 2k\pi$	–	–
Pole	–	–	$x_{Nk} = \pi/2 + k\pi$	$x_{Nk} = k\pi$
Senkr. Asymp.	–	–	$x = \pi/2 + k\pi$	$x = k\pi$

Die Funktionsgraphen haben wir bereits im Zusammenhang mit trigonometrischen Termen betrachtet:





Durch einen Faktor b im Argument kann eine Veränderung der Periode bewirkt werden. Ein zusätzlicher Summand c wird eine seitliche Verschiebung bewirkt. Ein externer Faktor a bewirkt eine Streckung in y – Richtung. Dann erhält man die allgemeinen Funktionen

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) \quad g(x) = a \cdot \cos(bx + c)$$
$$h(x) = a \cdot \tan(bx + c) \quad i(x) = a \cdot \cot(bx + c)$$

Hier sind besonders die Sinus- und die Kosinusfunktion zur Beschreibung von Schwingungsvorgängen von Bedeutung. Diese haben die Periode p = 2π / b. Der Wertebereich wird gestreckt auf das Intervall [– a ; + a]. Gleichzeitig verschieben sich die Nullstellen, Maxima und Minima.

Beispiele: 1) f (x) = 2 sin (0,5 x – π/3).
Periode: p = 4 π; Wertebereich: [– 2 ; + 2]
Für die Nullstellen gilt:

$$0 = 2\sin\left(0{,}5x_N - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$0{,}5x_{N1} - \frac{\pi}{3} = \arcsin(0) + 2k\pi = 0 + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{N1} = \frac{2}{3}\pi + 4k\pi$$

$$0{,}5x_{N1} - \frac{\pi}{3} = \arcsin(0) + 2k\pi = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{N1} = \frac{8}{3}\pi + 4k\pi$$

2) f (x) = 0,4 cos (4 x + π/2)
Periode: p = π/2; Wertebereich: [– 0,4 ; + 0,4]
Nullstellen:

$$0 = 0{,}4\cos\left(4x_N + \frac{\pi}{2}\right)$$

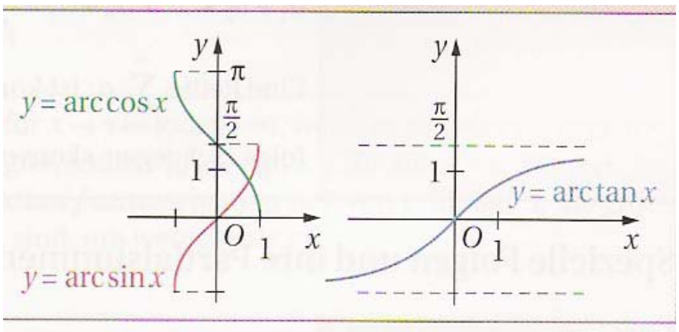
$$4x_{N1} + \frac{\pi}{2} = \arccos(0) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{N1} = \frac{1}{2}k\pi$$

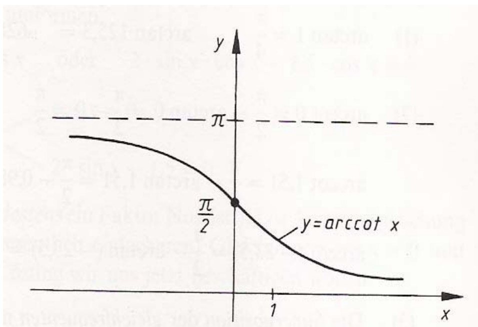
$$4x_{N2} + \frac{\pi}{2} = \arccos(0) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_{N2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$$

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind die Arcusfunktionen. Dabei ist zu beachten, dass wegen der Periodizität eine Umkehrung nur auf einem eingeschränkten Definitionsbereich möglich ist, dem Hauptzweig der Funktion.

f	sin (x)	cos (x)	tan (x)	cot (x)
ID zu f	– π/2 < x ≤ π/2	0 ≤ x ≤ π	– π/2 < x < π/2	0 < x < π
IW zu f	– 1 ≤ y ≤ +1	– 1 ≤ y ≤ + 1	– ∞ < y < + ∞	– ∞ < y < + ∞
f^{-1}	Arcsin (x)	Arc cos (x)	Arctan (x)	Arccot (x)
ID zu f^{-1}	– 1 ≤ y ≤ +1	– 1 ≤ y ≤ + 1	– ∞ < y < + ∞	– ∞ < y < + ∞
IW zu f^{-1}	– π/2 < x ≤ π/2	0 ≤ x ≤ π	– π/2 < x < π/2	0 < x < π
Asymptoten zu f^{-1}	–	–	y = ± π/2	y = 0 / y = π

Funktionsgraphen der Arcusfunktionen:





11. Hyperbolische Funktionen und Areafunktionen

Aus der natürlichen Exponentialfunktion lassen sich vier Funktionen ableiten, die unter der Bezeichnung Hyperbolische Funktionen bekannt sind:

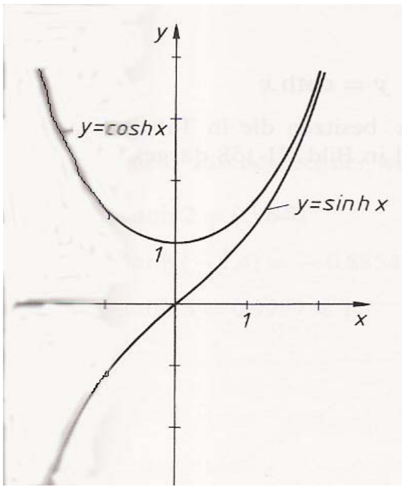
$$\textit{Sinus hyperbolicus}: \quad f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

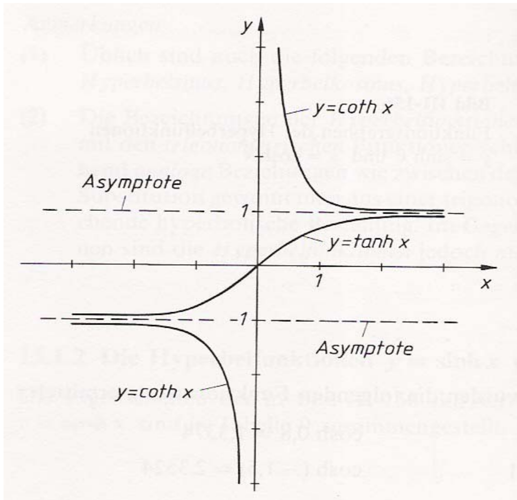
$$\textit{Kosinus hyperbolicus}: \quad g(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\textit{Tangens hyperbolicus}: \quad h(x) = \tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\textit{Kotangens hyperbolicus}: \quad i(x) = \coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

Funktionsgraphen:





Beispiel: Eine an zwei Punkten P und Q symmetrisch zur y – Achse in gleicher Höhe aufgehängte Kette nimmt unter dem Einfluss der Schwerkraft die geometrische Form einer Kettenlinie an, die durch die Funktion

$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ beschrieben wird. Der Parameter a ergibt sich dabei aus dem Abstand der Punkte P und Q voneinander und der Länge des Kettenstücks zwischen diesen Punkten.

Areafunktionen:

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen. Sie lassen sich durch logarithmische Terme ausdrücken. Für diese Umkehrfunktionen gelten wie bei den Arcusfunktionen eingeschränkte Definitionsbereiche.

$$\textit{Area sinus hyperbolicus}: \quad f(x) = ar\sinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}+1}\right) \quad \textit{für} \quad x \in IR$$

$$\textit{Areakosinus hyperbolicus}: \quad g(x) = ar\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^{2}-1}\right) \quad \textit{für} \quad x \geq 1$$

$$\textit{Area tangens hyperbolicus}: \quad h(x) = ar\tanh h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \textit{für} \quad |x| < 1$$

$$\textit{Areakotangens hyperbolicus}: \quad i(x) = ar\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \textit{für} \quad |x| > 1$$