Differentialrechnung

1. Der Ableitungsbegriff

Von vielen Messgrößen ist nicht nur ihr aktueller Wert von Bedeutung sondern auch das Maß ihrer Änderung. So ist zum Beispiel die aktuelle Änderung einer Geschwindigkeit die Beschleunigung eines Fahrzeugs. Man betrachtet dazu die Änderungsrate einer Größe.

Definition: Ist eine Funktion f auf einem Intervall [a ; b] definiert, so nennen wir den Differenzenquotienten

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [a ; b].

Beispiel: Bestimmung einer Änderungsrate: $f(x)=\sqrt{2x+3}$ in [1 ; 3]

$$m=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}38$$

Mit Hilfe der mittleren Änderungsraten lassen sich Näherungswerte für Zwischenwerte bestimmen (Interpolation). Die folgende Tabelle gibt einige Werte zur Entwicklung der Weltbevölkerung wieder.

Jahr	1804	1927	1960	1974	1987
Bevölkerung in Mrd.	1	2	3	4	5

Daraus kann man Näherungswerte für die Bevölkerung in den Jahren 1980 und 1982 abschätzen. Die Änderungsrate im Intervall [1974 ; 1987] beträgt

$$m=\frac{5-4}{1987-1974}=\frac{1}{13}\approx 0{,}077\,\frac{Mrd}{a}.$$

Mit dem Punkt (1974 | 4) ergibt sich die lineare Näherung

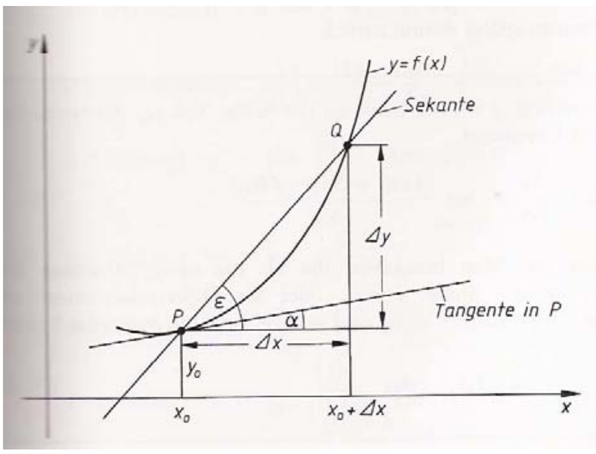
$$l(t)=0{,}077\cdot t-147{,}85$$

Für t = 1980 bzw. t = 1982 erhält man:

$$l(t=1980)=0{,}077\cdot 1980-147{,}85=4{,}4615\ Mrd.\,Menschen$$

$$l(t=1982)=0{,}077\cdot 1982-147{,}85=4{,}764\quad Mrd.\,Menschen.$$

Die graphische Darstellung der linearen Näherungsfunktion l (t) ist eine Sekante zum Funktionsgraphen von f, deren Steigung m_S gleich der mittleren Änderungsrate ΔB / Δt ist. Besser ist natürlich eine exakte Änderungsrate zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0. Diese ist gegeben durch die Steigung einer Tangente zum Funktionsgraphen von f am Punkt P (t_0 | $f(t_0)$). Damit ergibt sich das Problem, aus einem Punkt allein eine Geradengleichung zu bestimmen, das so genannte Tangentenproblem. Aus der Sekante lässt sich aber in vielen Fällen die Steigung der Tangente bestimmen.



Wir betrachten zwei Punkte P und Q auf dem Funktionsgraphen einer stetigen Funktion f: P (x_0 | f(x_0) und Q ($x_0 + \Delta x$ | f ($x_0 + \Delta x$). Dann besitzt die zugehörige Sekante durch P und Q die Steigung

$$m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Durch verschieben des Punktes Q zum Punkt P geht die Sekante über in die Tangente zum Graphen von f im Punkt P. Die Steigung der Tangente ergibt sich also als Grenzwert aus der Sekantensteigung:

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} m_S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dabei ist allerdings nicht sichergestellt, ob dieser Grenzwert existiert. Außerdem kann der Grenzwert bei Annäherung von links oder von rechts zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Dies führt zu folgender Definition:

Definition: Eine Funktion y = f (x) heißt an der Stelle $x_0 \in$ ID differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

in eindeutiger Weise existiert. Dieser Grenzwert heißt dann erste Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird bezeichnet mit y', f' (x_0) oder $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$. Der letztgenannte Quotient heißt „Differentialquotient df nach dx an der Stelle x_0".

Beispiele: 1) y = f(x) = 2x + 1:

$$m_S = \frac{2(x_0 + \Delta x) + 1 - (2x_0 + 1)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

Damit ist $m_T = \lim_{\Delta x \to 0} m_S = 2$ an jedem Punkt des Funktionsgraphen.

2) y = f (x) = |x| an der Stelle $x_0 = 0$:

$$m_S = \frac{|\Delta x - 0|}{\Delta x} = \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1 \qquad \text{für } \Delta x > 0 \text{, d.h. Annäherung von rechts.}$$

$$m_S = \frac{|\Delta x - 0|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1 \qquad \text{für } \Delta x < 0 \text{, d.h. Annäherung von links.}$$

Die beiden Grenzwert existieren zwar, aber sie führen zu verschiedenen Ergebnissen, d.h. die Funktion ist an der Stelle x = 0 nicht differenzierbar.

Der Differentialquotient kann unterschiedlich interpretiert werden. Zum einen ist er eine Rechenoperation bzw. das Ergebnis einer komplexen Rechenoperation. Geometrisch ergibt er die Steigung de Tangente an einen Funktionsgraphen und damit auch die Steigung des Funktionsgraphen selbst, zumindest an dem Punkt. Im betrachteten Sachzusammenhag beschreibt er die Änderungsrate einer Messgröße, die selbst wieder eine sinnvolle Messgröße sein kann.

Ist eine Funktion f auf einem ganzen Intervall [a ; b] oder ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar, so heißt die Funktion y' = f' (x) Ableitungsfunktion zu f. In vielen Fällen existiert diese Ableitungsfunktion und lässt sich mit Hilfe einfacher Ableitungsregeln bestimmen. Wir bestimmen jetzt einige solcher Ableitungsregeln.

Ableitung von Potenzfunktionen:

Sei y = f (x) = x^n mit n $\in$ IN. Dann gilt zunächst für den Differenzenquotienten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot\Delta x^k - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots.. + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots.. + \Delta x^n}{\Delta x} \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots.. + \Delta x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich für den Differentialquotienten:

$$
\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots.. + \Delta x^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}
$$

Diese Regel lässt sich auch für beliebige reelle Exponenten beweisen. Somit gilt:

Zur Funktion y = f (x) = x^r mit r $\in$ IR \ {0} ist y' = f' (x) = r x^{r-1} die Ableitungsfunktion.

Beispiel: f (x) = x^5 führt auf f' (x) = 5 x^4 .

Ableitung von Exponentialfunktionen:

Sei y = f (x) = a^x mit a $\in$ IR^+ . Dann ergibt sich für den Differenzenquotienten:

$$
\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.
$$

Bei der Bildung des Grenzwertes müssen wir nur den Bruchfaktor betrachten, da a^x konstant bleibt und als Faktor vor den Grenzwert gezogen werden kann. Wir betrachten als Spezialfall die Eulersche Zahl e. Sie ist definiert als $e = \lim_{n \longrightarrow \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Für große Werte von n gilt dann die Näherung:

$$
e^{1/n} \approx 1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad e^{1/n} - 1 \approx \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \approx 1.
$$

Der Grenzwert dieses Bruches für n gegen ∞ ist dann gleich dem Grenzwert des Bruches aus dem Differenzenquotienten für Δx gegen 0. Somit gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{1/n}-1}{1/n}\right]=1$$

Daraus ergibt sich als Ableitungsfunktion der Funktion f (x) = e^x : f' (x) = e^x . Für jede andere Basis werden wir die Ableitung später mit Hilfe einer weiteren Regel bestimmen können.

<u>Spezielle Ableitungsfunktionen:</u> (ohne weitere Beweise)

Trigonometrische Funktionen:

$$f(x)=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$$
$$f(x)=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\sin(x)$$
$$f(x)=\tan(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$f(x)=\cot(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Exponential- und Logarithmusfunktionen:

$$f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^x$$
$$f(x)=a^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\ln(a)\cdot a^x$$
$$f(x)=\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x}$$
$$f(x)=\log_a(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$$

Eine umfangreiche Auflistung spezieller Ableitungsfunktionen insbesondere zu Arkusfunktionen, hyperbolischen Funktionen und Areafunktionen findet man in Formelsammlungen.

Ist eine Ableitungsfunktion f' (x) ebenfalls differenzierbar, so nennt man die Ableitung von f' zweite Ableitung zur Funktion f und schreibt:

$$f'(x)'=\frac{d}{dx}f'(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)=f''(x).$$

Solange die Ableitungen noch differenzierbar sind, lässt sich diese Reihe von Ableitungsfunktionen fortsetzen. Für die Ableitung n-ter Ordnung gilt dann:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$$

<u>Differential einer Funktion:</u>

Die Terme dx, dy und df heißen Differentiale. Dabei bezeichnet das Differential der Funktion f an der Stelle x_0 df = f' (x_0) · dx die Änderung des Funktionswertes an der Stelle x_0 . Man spricht auch von der Änderungsrate des Funktionswertes bzw. der beschriebenen Messgröße.

2. Ableitungsregeln

Komplexere Funktionen sind oft mit Hilfe von erlaubten Rechenoperationen aus einfacheren Funktionen aufgebaut. Daher gibt es Regeln für die Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten aus Funktionen. Zur Ableitung solcher zusammengesetzter Funktionen verwendet man allgemeine Ableitungsregeln. Diese werden hier jetzt zusammengestellt und z.T. bewiesen.

Sei g (x) eine differenzierbare Funktion und g' (x) ihre Ableitungsfunktion. Ist f (x) = a·g (x) ein Vielfaches von g(x), so gilt für die Sekantensteigung bei f:

$$m_S = \frac{a \cdot g(x_1) - a \cdot g(x_0)}{x_1 - x_0} = a \cdot \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Bildet man den Grenzwert erhält man für die Tangentensteigung (**Faktorregel**):

$$m_T = a \cdot \lim \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} = a \cdot g'(x).$$

Beispiel: f (x) = 6 tan (x) führt auf die Ableitung $f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{6}{\cos^2(x)}$.

Für eine Summe f (x) = g (x) + h (x) zweier differenzierbarer Funktionen g und h gilt:

$$m_S = \frac{g(x_1) + h(x_1) - g(x_0) - h(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{g(x_1) - g(x_0) + h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Dies führt auf die Ableitungsfunktion (**Summenregel**):

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Jetzt lassen sich beliebige ganzrationale Funktionen ableiten.

Beispiel: $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 7$ $\quad f'(x) = 12x^3 - 10x + 2$

Neue Funktionen entstehen auch als Verkettung zweier einfacherer Funktionen, d.h. in einer einfachen Funktion a(x) steht anstelle der Variablen x eine andere innere Funktion i (x).

Beispiel: Aus a (x) = sin x wird f (x) = sin (3x+1)
mit der inneren Funktion i (x) = 3 x + 1.
Es ist also f (x) = a (i (x)).

Für solche Funktion Funktionen bestimmt man die Ableitung mit der **Kettenregel**:

$$f'(x) = g'(i(x)) \cdot i'(x).$$

Beispiele: 1) f (x) = sin (3x + 1) führt auf:
f ‘(x) = cos (3x + 1) · 3 = 3 cos (3x + 1).

2) $f(x)=\sqrt{4x^2+\ln(x)}$ führt auf:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^2+\ln(x)}}\cdot\left(8x+\frac{1}{x}\right)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+\ln(x)}}+\frac{1}{2x\sqrt{4x^2+\ln(x)}}.$$

3) $f(x)=\ln\left(\cos\left(x^2+\pi\right)\right)$ führt auf:

$$f'(x)=\frac{1}{\cos\left(x^2+\pi\right)}\cdot\left(-\sin\left(x^2+\pi\right)\right)\cdot 2x=-2x\cdot\tan\left(x^2+\pi\right).$$

4) $f(x)=4e^{x^2-6x+3}$ führt auf:

$$f'(x)=4e^{x^2-6x+3}\cdot(2x-6)$$

Die Herleitung dieser Regel gelingt über eine einfache Erweiterung des Differenzenquotienten zur Sekantensteigung:

$$m_S=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{g(i(x_1))-g(i(x_0))}{x_1-x_0}\cdot\frac{i(x_1)-i(x_0)}{i(x_1)-i(x_0)}$$
$$=\frac{g(i(x_1))-g(i(x_0))}{i(x_1)-i(x_0)}\cdot\frac{i(x_1)-i(x_0)}{x_1-x_0}$$

Der erste Faktor führt bei der Grenzwertbildung auf g‘(i), der zweite auf i‘(x), das Produkt also auf den Grenzwert g‘(i(x)) · i‘(x).

Wir betrachten jetzt ein Produkt aus zwei Funktionen: $f(x)=g(x)\cdot h(x)$.

Für die Sekantensteigung eines solchen Produktes bzw. den zugehörigen Differenzenquotienten gilt:

$$m_S=\frac{g(x_1)h(x_1)-g(x_0)h(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{g(x_1)h(x_1)-g(x_0)h(x_1)+g(x_0)h(x_1)-g(x_0)h(x_0)}{x_1-x_0}$$
$$=\frac{g(x_1)h(x_1)-g(x_0)h(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{g(x_0)h(x_1)-g(x_0)h(x_0)}{x_1-x_0}$$
$$=\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}\cdot h(x_1)+\frac{h(x_1)-h(x_0)}{x_1-x_0}\cdot g(x_0)$$

Daraus ergibt sich als Ableitungsfunktion zu f die **Produktregel**:

$$f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x).$$

Beispiele: 1) $f(x)=x^4\cdot e^{3x}$ führt auf:

$$f'(x)=4x^3\cdot e^{3x}+x^4\cdot e^{3x}\cdot 3=\left(4x^3+3x^4\right)\cdot e^{3x}$$

2) $f(x)=x^5\cdot\ln(x)$ führt auf:

$$f'(x)=5x^4\cdot\ln(x)+x^5\cdot\frac{1}{x}=x^4\cdot(5\ln(x)+1)$$

Für den Quotienten aus zwei Funktionen: $f(x)=\dfrac{z(x)}{n(x)}$

Gilt entsprechend die **Quotientenregel**: $f'(x)=\dfrac{z'(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n'(x)}{n^2(x)}$.

Der Beweis gelingt unter Rückgriff auf die beiden bereits bewiesenen Regeln. Wir schreiben f als Produkt in der Form $f(x)=z(x)\cdot n^{-1}(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= z'(x)\cdot n^{-1}(x)+z(x)\cdot\left[(-1)\cdot n^{-2}(x)\cdot n'(x)\right] \\ &= \frac{z'(x)\cdot n(x)}{n^2(x)}+\frac{z(x)\cdot(-1)\cdot n'(x)}{n^2(x)}=\frac{z'(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n'(x)}{n^2(x)} \end{aligned}$$

Auf einige spezielle Funktionen treffen die bisherigen Regeln nicht zu. Daher ergänzen wir noch zwei anspruchsvollere Varianten.

Beispiele: 1) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-3x}$ führt auf:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)(x^2-3x)-(x^2-4x+5)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2} \\ &= \frac{2x^3-10x^2+12x-2x^3+11x^2-22x+15}{(x^2-3x)^2} \\ &= \frac{1x^2-10x+15}{(x^2-3x)^2} \end{aligned}$$

2) $f(x)=\dfrac{\ln(x)+x}{e^x}$ führt auf:

$$f'(x)=\frac{\left(1/x+1\right)\cdot e^x-(\ln(x)+x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{1+x-x\ln(x)-x^2}{x\cdot e^x}$$

Logarithmische Ableitung:

Sei f (x) = x^x . Dann tritt die Variable in der Basis und im Exponenten auf. Nun gilt:

$$\ln(f(x))=\ln(x^x)=x\cdot\ln(x)$$

Jede Seite dieser Gleichung kann als Funktion betrachtet werden:

$$\begin{aligned} &links: \quad l(x)=\ln(f(x)) \\ &rechts: \quad r(x)=x\cdot\ln(x) \end{aligned}$$

mit den Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
l'(x) &= \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \qquad \textit{Kettenregel} \\
r'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \qquad \text{Pr}\,\textit{oduktregel}
\end{aligned}
.
$$

Da die Funktionen r und l gleich waren, müssen auch ihre Ableitungen übereinstimmen, so dass gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \ln(x) + 1 \\
f'(x) &= f(x) \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)
\end{aligned}
.
$$

Für dieses logarithmische Differenzieren gilt allgemein:

$$
f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}[\ln(f(x))].
$$

Zur Anwendung leitet man den Logarithmus des Funktionsterms ab und multipliziert diese Ableitung mit dem ursprünglichen Funktionsterm. Das Verfahren eignet sich für alle Funktionen der Form $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

Ableitung der Umkehrfunktion:

Ist f (x) eine umkehrbare Funktion mit der Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = g(y)$, dann gilt für die Ableitung der Funktion g (y):

$$
g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.
$$

Beispiel: Sei g (y) = ln (y).
Dies ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = e^x$. Es gilt:

$$
g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}
$$

3. Linearisierung einer Funktion

Mit Hilfe der 1. Ableitung f' einer Funktion f lässt sich die Steigung der Funktion f an verschiedenen Stellen des Funktionsgraphen bestimmen.

Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 6x$ im Punkt P (2 | ?)
Durch Einsetzen der x – Koordinaten $x_P = 2$ in die Funktion ergibt sich zunächst: $y_P = f(x_P) = 0$.
Die Ableitung lautet: $f'(x) = 6x - 6$.
Die Steigung ist dann: $m = f'(x_P) = 6$.

Mit Hilfe der Steigung kann man jetzt die Gleichung der Tangente und die Gleichung der Normale im Punkt P bestimmen. Aus einem gegebenen Punkt P (x_P | $y_P = f(x_P)$) ergibt sich als Tangente (Punkt – Steigungs – Form der Geradengleichung):

$$f'(x_P) = \frac{y - y_P}{x - x_P}$$
$$t(x) = y = f'(x_P) \cdot (x - x_P) + y_P \quad .$$

Beispiel: wie oben:
$t(x) = 6(x - 2) + 0 = 6x - 12$.

Als Normale bezeichnet man eine Gerade, die im rechten Winkel zur Tangente steht. Für die Steigung einer Normalen gilt also:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(x_P)}.$$

Die Gleichung der Normalen lautet also:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_P)}(x - x_P) + y_P$$

Beispiel: wie oben:
$n(x) = -\frac{1}{6}(x - 2) + 0 = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$.

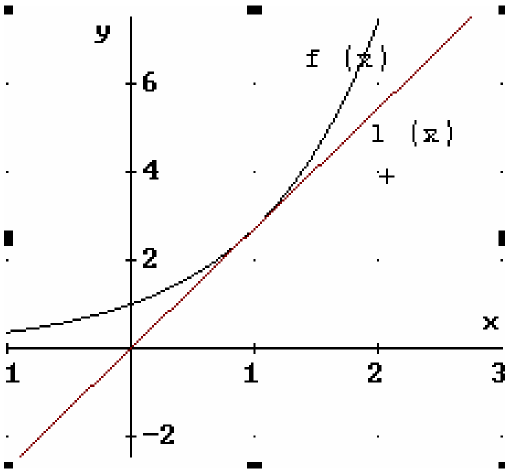
Eine nichtlineare Funktion f(x) lässt sich in der Umgebung eines Punktes P näherungsweise durch die Tangente im Punkt P ersetzen. Diese Tangente gehört zu einer linearen Funktion. Man spricht daher von einer linearen Näherung oder einer Linearisierung der Funktion f. Diese wird in der Form

$$y - y_P = f'(x_P) \cdot (x - x_P) \qquad bzw. \qquad \Delta y = f'(x_P) \cdot \Delta x$$

dargestellt.

In naturwissenschaftlichen Anwendungen benötigt man häufig die ungefähren Abweichungen der Messgrößen von einem Arbeitspunkt P. Diese Abweichungen werden dann durch Δx und Δy beschrieben.

Beispiel 1: f (x) = e^x soll im Punkt P (1 | e^k) linearisiert werden.
Mit f' (x) = e^x und f' (x_P = 1) =e ergibt sich:
y – e = e (x – 1).
Graphisch ersetzen wird die Exponentialkurve durch eine Gerade.



Wir überprüfen die Genauigkeit an einigen Werten:

x	0,5	0,8	0,9	0,95	1	1,05	1,1	1,2
f (x)	1,6487	2,2255	2,4596	2,5857	2,71828	2,8577	3,0042	3,3201
l (x)	1,3591	2,1746	2,4464	2,5824	2,71828	2,8542	2,9901	3,2619

In der direkten Umgebung [0,9 ; 1,1] liefert die Linearisierung gute Werte. Die Größe des akzeptablen Intervalls hängt von der geforderten Genauigkeit ab.

Beispiel 2: Änderung der Schwingungsdauer eines elektrischen Schwingkreises
Für die Schwingungsdauer gilt: $T = 2\pi\sqrt{LC}$.
Eine geringfügige Änderung ΔC der Kapazität C verändert die Schwingungsdauer um ΔT. Es gilt: $\frac{dT}{dC} = \frac{2\pi}{2\sqrt{LC}} \cdot L = \frac{\pi L}{\sqrt{LC}}$.
In einer akzeptabel kleinen Umgebung der festgelegten Kapazität C_0 gilt:

$$\Delta T = \frac{dT}{dC} \cdot \Delta C = \frac{\pi L}{\sqrt{LC}} \cdot \Delta C = \pi\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \Delta C .$$

Mit den Werten L = 0,1 H für die Induktivität der Spule und C = 10 µF für die Kapazität des Kondensators kann man die Bandbreite für die Schwingungsdauer ΔT bei einem Fehler ΔC = 0,2 µF in der Kapazität abschätzen:

$$\Delta T = \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}1H}{10^{-5}F}} \cdot 2 \cdot 10^{-7}F = 0{,}06\,ms$$

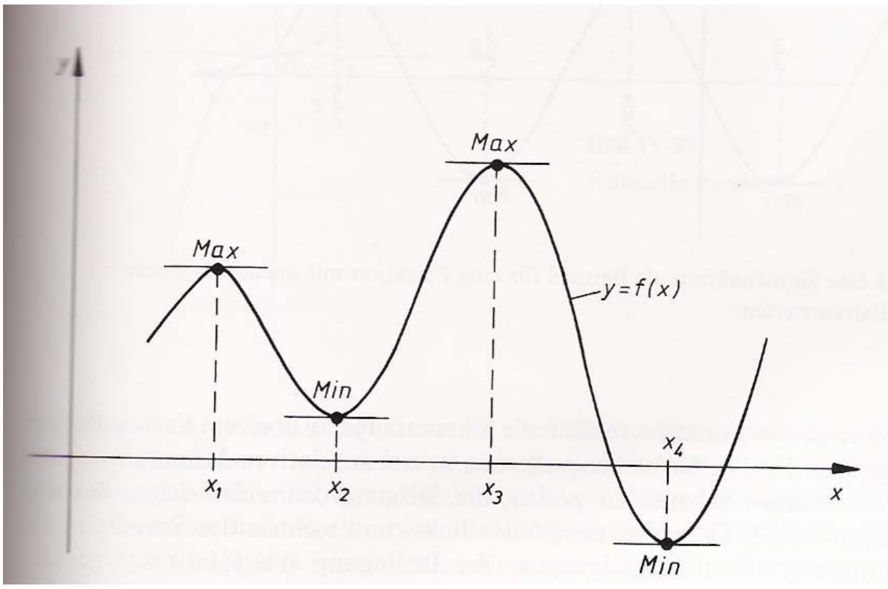
Solche Abschätzungen sind besonders in der Elektrik aber auch in der Steuer- und Regelungstechnik wichtig, da die Bauteile immer eine gewisse Fehlertoleranz besitzen. Die Auswirkungen dieser Toleranz sind zu berücksichtigen.

4. Funktionsuntersuchungen

Mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung können wir weitere Informationen über Funktionsgraphen gewinnen. Insbesondere die Lage charakteristischer Punkte wie lokales Extrema und Wendepunkte kann bestimmt werden.

Lokale Extrema:

Ein lokales oder relatives Extremum ist ein Hochpunkt oder Tiefpunkt. In einer gewissen Umgebung nimmt die Funktion keine kleineren bzw. größeren Funktionswerte an. Die Bezeichnung „lokal" wird verwendet, da es sich um eine lokale, d.h. in einer kleinen Umgebung gültige Eigenschaft handelt. In größerer Entfernung kann die Funktion durchaus noch größere oder kleinere Werte annehmen.



In einem lokalen Extrempunkt ist die Steigung des Funktionsgraphen 0. Über die Bedingung $f'(x_E) = 0$ lässt sich also die x – Koordinate der Extrema bestimmen.

Beispiel: Wir suchen die Extrema der Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 16x$

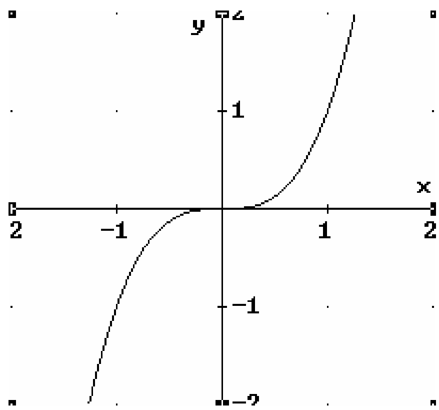
$4x_E^3 - 16x_E = 0$

$x_{E1} = 0$ $\quad$ $x_{E2/3} = \pm 2$

Die zugehörigen y – Koordinaten ergeben sich als Funktionswerte:

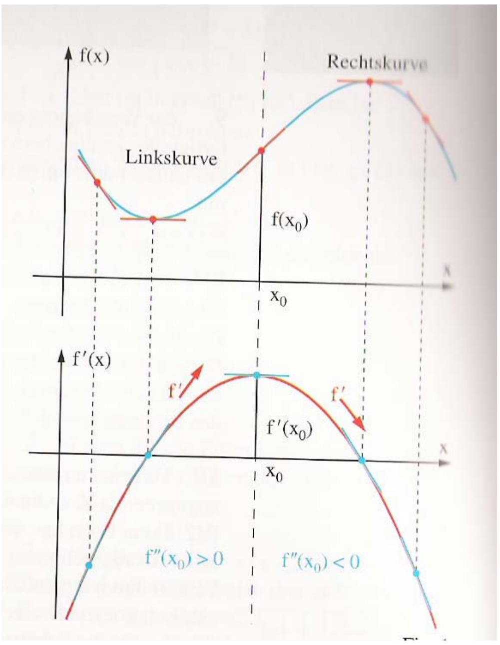
$y_{E1} = f(x_{E1} = 0) = 5$ $\quad$ $y_{E2/3} = f(x_{E2/3} = \pm 4) = -11$

Dieser Ansatz führt nicht immer zu Extrempunkten. Die Funktion $f(x) = x^3$ führt auf die Ableitung $f'(x) = 3x^2$, und damit mit der Bedingung $f'(x_E) = 0$ zu den Werten $x_{1/2} = 0$. Bei x = 0 besitz die Funktion jedoch kein Extremum. Diese Art von Punkt bezeichnet man als Terrassenpunkt oder Sattelpunkt.



Eine vollständige Bedingung für lokale Extrema ergibt sich mit Hilfe der zweiten Ableitung. Dazu betrachten wir zunächst die grafische Bedeutung von f''.

Deutung der 2. Ableitung:



Die zweite Ableitung f'' einer Funktion f haben wir eingeführt als Ableitung der 1. Ableitung. Damit beschreibt f'' die Steigung des Graphen von f' oder die Änderungsrate von f'. Nimmt f' zu, so ist f'' also positiv, nimmt f' ab, so ist f'' negativ. Ist f'' = 0, so ändert sich f' und damit die Steigung von f gerade nicht.

In einem Tiefpunkt beschreibt der Funktionsgraph der Funktion f eine Linkskurve, die Steigung f' verändert sich von negativ auf positiv, nimmt also zu. Somit muss die 2. Ableitung in einem Tiefpunkt $f''(x_T) > 0$ positiv sein.

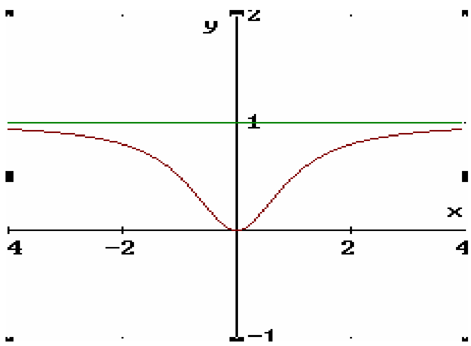
In einem Hochpunkt beschreibt der Funktionsgraph von f eine Rechtskurve, die Steigung f' verändert sich von positiv zu negativ, nimmt also ab. Folglich muss die 2. Ableitung in einem Hochpunkt $f''(x_H) < 0$ negativ sein.

Im Fall der kubischen Parabel $f(x) = x^3$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ gar keine Krümmung vorhanden. Die Steigung nimmt von positiven Werten kommend ab, wird bei $x_0 = 0$ dann auch 0, um anschließend wieder zu wachsen. Der Funktionsgraph von f ist links und rechts von der Stelle $x_0 = 0$ in einer Rechtskrümmung. An der Stelle $x_0 = 0$ ist die Krümmung 0, d.h. $f''(x_0 = 0) = 0$.

Damit erhalten wir als vollständige Bedingung für lokale Extrema:

Satz: Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion mit den Ableitungen f' und f'', so besitzt der Graph von f in x_E genau dann ein
lokales Minimum, falls gilt: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$
lokales Maximum, falls gilt: $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$.

Beispiele: 1) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$



1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

2. Ableitung:

$$f''(x) = \frac{2\left(1+x^2\right)^2 - 2x \cdot 2\left(1+x^2\right) \cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$= \frac{2-6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Die Bedingung $f'(x_E) = 0$ führt auf die Gleichung
$2x_E = 0$ und liefert $x_E = 0$.
$f''(x_E = 0) = 2 > 0$ bedeutet, dass es sich um ein lokales Minimum handelt.

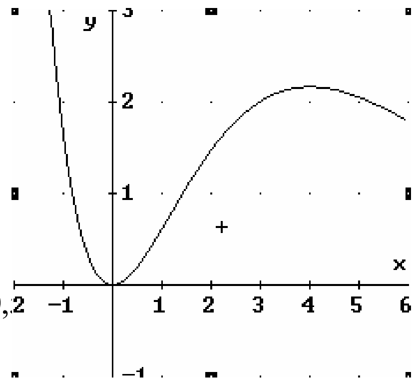
2) $f(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x}$

1. Ableitung:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-0,5x} + x^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5)$$
$$= \left(2x - 0,5x^2\right) \cdot e^{-0,5x}$$

2. Ableitung:

$$f''(x) = (2 - x) \cdot e^{-0,5x} + \left(2x - 0,5x^2\right) \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,$$
$$= \left(0,25x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^{-0,5x}$$



Die Bedingung f'(x_E) = 0 führt auf die Gleichung
$2x_E - 0,5\ x_E^2 = 0$ und liefert: $x_{E1} = 0$ und $x_{e2} = 4$.
f'' ($x_{E1} = 0$) = 2 > 0 bedeutet: Lokales Minimum T (0 | 0)
f'' ($x_{E2} = 4$) = – 0,271 < 0 bedeutet: lokales Maximum H (4 | 2,165)

Wendepunkte:

Die Eigenschaft f'' (x) = 0 kann auch noch anders interpretiert werden. Da f'' die Ableitung von f' ist sind die Nullstellen von f'' die Extremstellen von f', d.h. die Steigung von f ist dort besonders steil. Dies sind genau die Punkte, in denen der Graph von f von einer Rechts- in eine Linkskrümmung wechselt oder umgekehrt. Diese Punkte nennt man Wendepunkte.

Beispiel: Unsere Funktion f (x) = $x^4 - 8\ x^2 + 5$
besitzt die 2. Ableitung: f'' (x) = $12\ x^2 - 16$.
Aus der Bedingung f'' (x_W) = 0 ergibt sich die Gleichung
$12\ x_W^2 - 16 = 0$ und damit die Wendestellen:

$$x_{W1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,1547 .$$

Die y – Koordinaten ergeben sich auch hier als Funktionswerte:
$y_{W1/2} = f\ (x_{W1/2}) \approx -3,89$
Damit ergeben sich zwei Wendepunkte:
W_1 (1,1547 | – 3,89) W_2 (–1,1547 | – 3,89)

Die Bedingung f'' (x_W) = 0 ist für Wendepunkte aber ebenfalls nicht ausreichend. Es gilt:

Satz: Ist f eine dreimal differenzierbare Funktion mit den Ableitungen f', f'', und f''', so besitzt der Graph von f in x_W genau dann einen Wendepunkt, falls gilt:
f''(x_W) = 0 und f'''(x_W) ≠ 0.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = x^2 - 8x + 5$ $\qquad f''(x) = 2x - 8$
Liefert $2x_W - 8 = 0$ $\qquad x_W = 4$.
$y_W = f\ (x_W = 4) = -23\ 2/3$ $\qquad$ W (4 | – 23 2/3) .
f'''($x_W = 4$) = 2 ≠ 0. W ist ein echter Wendepunkt!

Beispiel einer vollständigen Funktionsuntersuchung:

Gegeben: $f(x)=\frac{-5x^2+5}{x^3}$

I Definitionsbereich: ID = IR \ {0}

II Symmetrie: $f(-x)=\frac{-5(-x)^2+5}{(-x)^3}=\frac{-5x^2+5}{-x^3}=-\frac{-5x^2+5}{x^3}=-f(x)$

f ist ungerade, der Graph von f liegt punktsymmetrisch zum Ursprung.

III Nullstellen: Bed.: $f(x_N)=0$

$5-5x_N^2=0$ $\quad x_{N1}=-1 \quad x_{N2}=+1$

IV Ableitungen

$$f'(x)=\frac{-10x\cdot x^3-\left(-5x^2+5\right)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-10x^2+15x^2-15}{x^4}=\frac{5x^2-15}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{10x\cdot x^4-\left(5x^2-15\right)\cdot 4x^3}{x^8}=\frac{10x^2-20x^2+60}{x^5}=\frac{-10x^2+60}{x^5}$$

$$f'''(x)=\frac{-20x\cdot x^5-\left(-10x^2+60\right)\cdot 5x^4}{x^{10}}=\frac{30x^2-300}{x^6}$$

V Extrema: Bed.: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$.

$5x_E^2-15=0$ $\quad x_{E1}=\sqrt{3} \quad x_{E2}=-\sqrt{3}$

Extremwertentscheid: $f''(x_{E1})=\frac{-30+60}{9\sqrt{3}}=+\frac{30}{27}\sqrt{3}>0$ Minimum

$f''(x_{E2})=\frac{-30+60}{-9\sqrt{3}}=-\frac{30}{27}\sqrt{3}<0$ Maximum

Funktionswerte berechnen:

$f(x_{E1})=\frac{-15+5}{3\sqrt{3}}=-\frac{10}{9}\sqrt{3}$ $\qquad TP\left(\sqrt{3}\,\middle|\,-\frac{10}{9}\sqrt{3}\right)$

$f(x_{E1})=\frac{-15+5}{-3\sqrt{3}}=\frac{10}{9}\sqrt{3}$ $\qquad HP\left(-\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{10}{9}\sqrt{3}\right)$

VI Wendepunkte: Bed.: $f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0$.

$-10x^2+60=0$ $\quad x_{W1}=\sqrt{6} \quad x_{W2}=-\sqrt{6}$

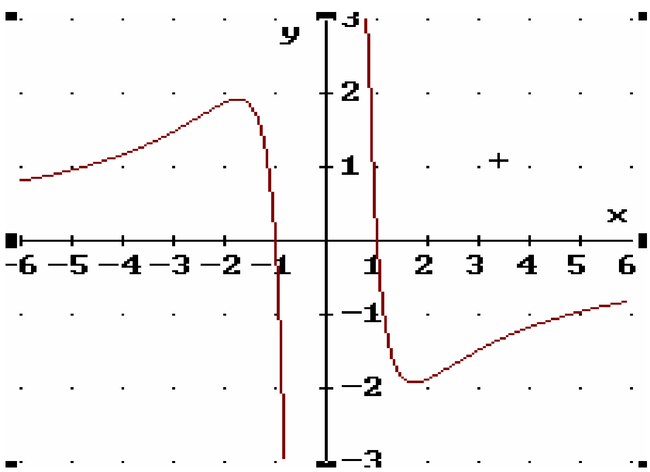
VII Polstellen: Bed.: $n(x_P)=0$

$x_P=0$ Pol mit VZW

VIII Asymptoten:

Die Funktion nähert sich der x – Achse, d.h. $a(x)=0$.

waagerechte Asymptote



5. <u>Krümmungskreise</u>

Mit Hilfe der zweiten Ableitung einer Funktion f lässt sich auch ein Krümmungskreis bestimmen. Dazu sei f ein ausreichend oft differenzierbare Funktion und B (x_B | y_B) ein Punkt auf dem Funktionsgraphen. Der Krümmungskreis im Punkt B ist dann der Kreis, der sich tangential von innen an den Funktionsgraphen anschmiegt. Dann bezeichnet der Term

$$\kappa = \frac{f''(x_B)}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{1,5}}$$

die Krümmung des Funktionsgraphen im Punkt B. Die Krümmung ist Maß dafür, wie stark der Kurvenverlauf von einer Geraden abweicht. Eine Gerade hat die Krümmung κ = 0. Sie ist negativ in einer rechtsgekrümmten Kurve, z.B. in einem Hochpunkt, positiv in einer linksgekrümmten Kurve, z.B. in einem Tiefpunkt.

Aus der Krümmung ergibt sich der Radius des Krümmungskreises zu: $\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right|$

Die Koordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises sind:

$$x_M = x_B - \frac{\left(1+f'(x_B)^2\right)\cdot f'(x_B)}{f''(x_B)} \qquad y_M = y_B + \frac{1+f'(x_B)^2}{f''(x_B)}$$

Beispiel 1: $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ Halbkreis

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-1\cdot\sqrt{r^2-x^2}+x\cdot\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}}{r^2-x^2}=\frac{-r^2}{\left(r^2-x^2\right)^{1,5}}$$

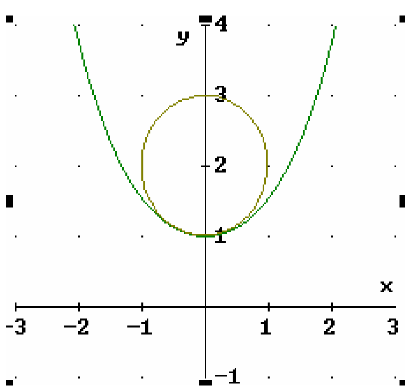
$$\kappa=\frac{\frac{-r^2}{\left(r^2-x^2\right)^{1,5}}}{\left(1+\frac{x^2}{r^2-x^2}\right)^{1,5}}=\frac{\frac{-r^2}{\left(r^2-x^2\right)^{1,5}}}{\left(\frac{r^2}{r^2-x^2}\right)^{1,5}}=\frac{-r^2}{r^3}=-\frac{1}{r}$$ unabhängig von B!!

Damit ergibt sich eine Rechtskrümmung mit dem Radius r.
Der Mittelpunkt liegt in M (0 | 0), da wo eben der Kreismittelpunkt liegt.

Beispiel 2: Kettenlinie
f (x) = cosh (x) in B (0 | 1)
f' (x) = sinh (x)
f''(x) = cosh (x)

$$\kappa=\frac{\cosh(0)}{\left[1+\sinh^2(0)\right]^{1,5}}=\frac{1}{\left[1+0\right]^{1,5}}=1$$

Linkskrümmung mit r = 1
Mittelpunkt: M (0 | 2)



6. Funktionsbestimmungen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Funktion zu bestimmen, die bestimmte Eigenschaften besitzen soll. Wir werden jetzt an verschiedenen Beispielen solche Möglichkeiten kennen lernen.

Beispiel 1: Bestimmung aus allen Nullstellen:
Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit Nullstellen bei x1 = 3, x2 = – 4 und x3 – 1.

Lösung 1: f(x) = a (x – x1) (x – x2) (x – x3) = a (x – 3) (x + 4) (x + 1)
= a (x2 + x – 12)(x + 1) = a x3 + 2 a x2 – 11 a x – 12 a

Beispiel 2: Bestimmung aus besonderen Punkten des Funktionsgraphen:
Bestimmen Sie diejenige ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph in
E (– 2 | 4) ein Extremum und in W (0 | 1) einen Wendepunkt besitzt.

Lösung 2: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + b$
liefert 4 Gleichungen:
I 4 = – 8 a + 4 b – 2 c + d
II 1 = d
III 0 = 12 a – 4 b + c
IV 0 = b
Damit reduziert sich das System zu
I‘ 3 = – 8 a – 2 c
III‘ 0 = 12 a + c
I‘ + 2 III‘ : 3 = 16 a
ergibt
a = 3/16 c = – 9/4 = – 2,25
f(x) = 0,1875 x3 – 2,25 x + 1

Beispiel 3: Polstellen gebrochenrationaler Funktionen
Bestimmen Sie eine gebrochenrationale Funktion mit Polstellen bei 1 und – 1 und Nullstellen bei 2 und – 2.

Lösung 3: $$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

Beispiel 4: Bestimmung einer Exponentialfunktion:
Der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = q\,e^{tx}$ verläuft durch den Punkt P (0 | 2) und hat dort die Steigung m = 0,5. Bestimmen Sie die Konstanten q und t.

Lösung 4: $f'(x) = tq\,e^{tx}$
Einsetzen der Punkte liefert zwei Gleichungen:
2 = q und 0,5 = tq
$f(x) = 2e^{0,25\,x}$.

Beispiel 5: Bestimmung einer Absorptionsfunktion:
Im Meerwasser wird die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Tiefe unter-

sucht.
In x = 2 m Tiefe misst man 16% der Intensität an der Oberfläche. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion, welche die Intensitätsabnahme beschreibt.

Lösung 5: Gesucht ist eine Funktion der Form $I(x) = I_0 \cdot e^{-kx}$.
Da in x = 2 m Tiefe gilt $I\ (x = 2) = 0{,}16 \cdot I_0$, folgt:
$I_0 \cdot e^{-k\cdot 2} = 0{,}16\ I_0$
$k = \ln(0{,}16) : (-2) \approx 0{,}916$
Damit ergibt sich als Funktionsgleichung: $I(x) = 5\ \mathrm{IE} \cdot e^{-0{,}916 \cdot x}$.

Beispiel 6: Bestimmung aus einer Messreihe
Messung von Zeit und Weg bei einem Fahrzeug

t in s	0,2	0,6	0,8	1,4	1,8	2,0
s in m	0,38	3,45	6,1	18,5	31,8	38,2

Lösung 6: Mit $K = s / t^2$ erhält man:

t in s	0,2	0,6	0,8	1,4	1,8	2,0
s in m	0,38	3,45	6,1	18,5	31,8	38,2
K in ms^{-2}	9,5	9,58	9,53	9,44	9,81	9,55

$K = 9{,}57\ ms^{-2}$

Beispiel 7: Bestimmung eines Bakterienwachstums

Uhrzeit	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00
Anzahl	240	290	360	440	530	650

Lösung 7: Mit $\beta = \ln(B/B_0) / t$ erhält man

Uhrzeit	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00
t in h	0	1	2	3	4	5
Anzahl	240	290	360	440	530	650
β i m^{-1}	–	0,189	0,203	0,202	0,198	0,199

$\beta = 0{,}1982\ h\ -1$

Die Funktion lautet also: $B(t) = 240 \cdot e^{0{,}198 h^{-1} \cdot t}$

7. Extremwertprobleme

Extrema von Funktionen haben in der Praxis konkrete Bedeutungen. Meist ist aus einem Sachzusammenhang heraus eine Funktion aufzustellen, deren Extrema dann gesucht sind.

Beispiel 1: Die Kosten, um x Fernsehgeräte am Tag zu produzieren betragen ($x^2 + 140x + 100$)€, der Verkaufspreis pro Apparat ($200 - 2x$)€. Gesucht ist die tägliche Produktionsmenge für maximalen Gewinn.

Lösung 1: Die Gewinnfunktion lautet:
$G(x) = x \cdot (200 - 2x) - (x^2 + 140x + 100) = -3x^2 + 60x - 100$
$G'(x) = -6x + 60$
$G''(x) = -6 < 0$
liefert ein Maximum bei $x = 10$.

Beispiel 2: Die Tragfähigkeit eines rechteckigen Balkens ist proportional zu seiner Breite x und zum Quadrat der Höhe y des Balkens. Aus einem Baumstamm von kreisförmigem Querschnitt mit dem Durchmesser d soll ein Balken möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Berechnen Sie die Maße des Balkens für d = 0,5 m.

Lösung 2:

$T(b, h) = k\,b\,h^2$ Zielfunktion
$b^2 + h^2 = d^2$ Nebenbedingung
$T(b) = kbd^2 - kb^3$
$T'(b) = kd^2 - 3kb^2$ $\quad b = \frac{d}{\sqrt{3}} \approx 29cm \qquad h \approx 41$ cm

Beispiel 3: Eine Ölkanne soll die Form eines Zylinders mit einem aufgesetzten Kegel gleichen Grundkreisdurchmessers erhalten und $V = 6\pi$ VE aufnehmen. Die Höhe des Kegels soll aus optischen Gründen zwei Drittel des gemeinsamen Grundkreisdurchmessers betragen. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit möglichst wenig Material benötigt wird?

Lösung 3:

$O(s, r, h_Z) = \pi r^2 + 2\pi r h_Z + \pi r s$ Zielfunktion
1) $h_K^2 + r^2 = s^2$
2) $h_K = 4/3\, r$ Nebenbedingungen
3) $V = pr^2 h_Z + 1/3\, pr^2 h_K = 6\pi$

$\Rightarrow O(r) = \pi r^2\, 2\pi r\,(6/r^2 - 4r/9) + 5/3\, \pi r^2 = \frac{16}{9}\pi r^2 + \frac{12\pi}{r}$

$\Rightarrow O'(r) = \frac{32}{9}\pi r - \frac{12\pi}{r^2}$ liefert $r = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} LE$

$h_Z = 2$ LE $\qquad h_K = 2$LE $\qquad s = 2{,}5$ LE

Beispiel 4: In einem Wechselstromkreis sind ein ohmscher Widerstand R, eine Spule mit der Induktivität L und ein Kondensator mit der Kapazität C in Reihe geschaltet. Für den Scheitelwert des Wechselstroms gilt:

$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$. Dabei ist dabei die Kreisfrequenz des Wechselstroms.

Gesucht ist die Frequenz, bei welcher der Strom ein Maximum erreicht.

Lösung 4: Der Strom erreicht sicher dann ein Maximum, wenn der Nenner ein Minimum erreicht. Daher betrachten wir die Nennerfunktion mit ihren Ableitungen:

$$n(\omega) = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$n'(\omega) = 2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right) \quad .$$

$$n''(\omega) = 2\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2 - \frac{4}{\omega^3 C}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Die notwendige Bedingung für Extrema liefert:

$$2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right) = 0$$

$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0 \quad \vee \quad \left(L + \frac{1}{\omega^2 C}\right) = 0$. Damit haben wir eine mögliche Lösung

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \vee \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{-LC}}$$

gefunden. Einsetzen in die 2. Ableitung zur Prüfung der hinreichenden Bedingung:

$$n''\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = 2(L + L)^2 - \frac{4L}{1}(L - L) = 8L^2 > 0 .$$

Somit erreicht unsere Nennerfunktion n(ω) ein Minimum und der Scheitelwert des Stroms ein Maximum.

Beispiel 5: Einer Ellipse mit den Halbachsen a und b soll ein achsenparalleles Rechteck von maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Zu bestimmen ist der Anteil dieses Rechtecks an der Ellipsenfläche.

Lösung 5: Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. $y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

Zielfunktion: $F(l,h) = l \cdot h$

Nebenbedingung: P $\left(\frac{l}{2} \middle| \frac{h}{2}\right)$ liegt auf der Ellipse, d.h. $\frac{h}{2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Einsetzen: $F(l) = l \cdot 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Ableitung: $F'(l) = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} + l \cdot \frac{2b \cdot \left(-\frac{1}{2}l\right)}{a \cdot 2\sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}}} = \frac{2b}{a} \cdot \frac{2a^2 - l^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}}}$

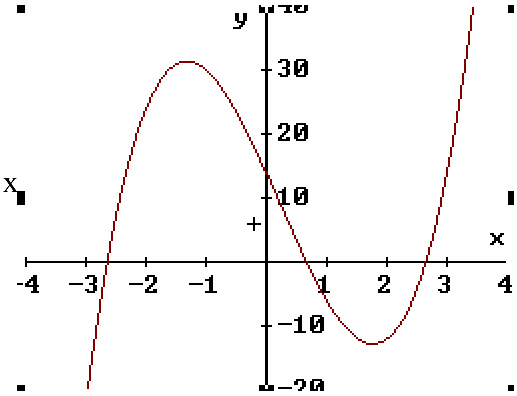
Nullstellen des Zählers: $l = \pm\sqrt{2}a$.

Ergebnisse: $l = \sqrt{2}a \qquad h = b\sqrt{2} \qquad F_R = 2ab$

Anteil des Rechtecks: $\frac{F_R}{F_E} = \frac{2ab}{\pi ab} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}6366 = 63{,}66\%$

8. Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

Es gibt eine Vielzahl von Funktionen, deren Nullstellen sich nicht elementar bestimmen lassen, schlimmstenfalls sogar algebraisch nicht berechenbar sind. Dann greift man auf iterative Näherungsverfahren zurück. Das wichtigste unter diesen Verfahren ist das Verfahren von Newton. (Zeichnung!!)



Beispiel: $f(x) = 3\,x^3 - 2\,x^2 - 21\,x + 14$
Zunächst wählt man einen Startwert x_0
Dann bestimmt man die Tangente an die Funktion im Punkt $P_0\ (x_0 \,|\, f(x_0))$:
$f(5) = 234$
$f'(x) = 9\,x^2 - 4\,x - 21$
$f'(5) = 184$
$t_0(x) = 184\,x - 686$
Diese Tangente schneidet irgendwo die x – Achse. Diese Nullstelle von t_0 wird berechnet: $x_1 = 686/184 = 3\ 67/92 \approx 3{,}728$
Mit diesem x Wert wird eine neue Tangente t_1 bestimmt usw. Das führt zu folgender Tabelle: (siehe EXCEL – Ausdruck)!

Bereits nach 6 Schritten erhalten wir ein akzeptables Ergebnis und haben die Nullstelle auf 7 Stellen genau bestimmt.

Für die einzelnen Rechenschritte ergeben sich folgende Formeln:

$$t_n(x) = f'(x_n)\cdot(x - x_n) + f(x_n) = f'(x_n)\cdot x + \left(f(x_n) - f'(x_n)\cdot x_n\right)$$

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n) - f'(x_n)\cdot x_n}{-f'(x_n)} = \frac{f'(x_n)\cdot x - f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wichtig für die Berechnung ist also nur der letzte Schritt: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ Damit ergibt sich die nächste, bessere Näherung an die gesuchte Nullstelle. Man bestimmt jetzt eine Folge von Werten x1 , x2, …bis die Werte sich praktisch nicht mehr ändern. Damit hat man als Grenzwert der Folge die gesuchte Nullstelle gefunden.

Zur Bestimmung weiterer Nullstellen reduziert man das Polynom mit dem Hornerverfahren oder der Polynomdivision und sucht anschließend nach den weiteren Lösungen, z.B durch erneute Anwendung des Newton – Verfahrens mit einem anderen Startwert (siehe EXCEL – Tabelle).
Eine falsche Wahl des Startwertes kann dazu führen, dass wir entweder die gleiche Nullstelle wieder finden, oder dass das Verfahren nicht konvergiert und wir gar keine Nullstelle finden.

Das Verfahren kann auch zum Lösen von Gleichungen verwendet werden.

Beispiel: $\cos(x) = x$
entspricht den Nullstellen der Funktion $f(x) = \cos(x) - x$
darauf wenden wir unser Verfahren an:
$f'(x) = -\sin(x) - 1$

9. Taylorreihen

Wir betrachten die Potenzreihe $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$. Dies ist die geometrische Reihe, die für $|x| < 1$ konvergiert. Für andere Werte von x wird die Summe unendlich groß. Im Falle der Konvergenz gilt: $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Dies kann man als Gleichheit zweier Funktionen auffassen: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ liefert stets die gleichen Funktionswerte wie die Potenzreihe $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$. Damit können wir die Funktion als Potenzreihe umschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$$

Diese Näherung gilt nur für $|x| < 1$, da andernfalls die Potenzreihe nicht konvergiert. Jede endliche Summe bis zu einer Potenz x^n liefert dann einen Näherungswert für den exakten Funktionswert, der umso besser wird, je größer n ist.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung einer solchen Potenzreihe bei bekannter Funktion f ist die Mac Laurinsche Reihe.

Definition: Ist f eine hinreichend oft differenzierbare Funktion, so kann man den Funktionsterm in guter Näherung ersetzen durch das Polynom:

$$t_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!} \cdot x^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} \cdot x^k$$

In der Praxis bricht man die Reihe nach einer endlichen Anzahl von Summanden ab und erhält dadurch eine Potenzfunktion vom Grade n.

Beispiele: 1) f (x) = sin (x) führt auf

$$t_3(x) = 0 + x - \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \qquad t_4(x) = 0 + x - \frac{0}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4$$

Vergleichen wir einige Funktionswerte:

f (x)=sin (x)

x	f (x)	t_2(x)	t_3(x)	t_4(x)	t_5(x)
-2,000000	-0,909297	-2,000000	-0,666667	-0,666667	-0,933333
-1,000000	-0,841471	-1,000000	-0,833333	-0,833333	-0,841667
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1,000000	0,841471	1,000000	0,833333	0,833333	0,841667
2,000000	0,909297	2,000000	0,666667	0,666667	0,933333
3,000000	0,141120	3,000000	-1,500000	-1,500000	0,525000
4,000000	-0,756802	4,000000	-6,666667	-6,666667	1,866667

Man erkennt, dass diese Näherung nur in der Nähe der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ gut ist. Zur Verbesserung der Genauigkeit erhöht man einfach die Anzahl der Summanden. Die Sinusfunktion lässt sich auch vollständig und geschlossen als Reihe darstellen:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \cdot x^{(2k+1)} .$$

2) Binomische Reihe: f (x) = $(x + 1)^n$ führt auf

$$t_3(x) = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!}x^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}x^3$$

Die Koeffizienten sind Binomialkoeffizienten, so dass wir schreiben können:

$(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Diese Reihe ist endlich und konvergiert auf ganz IR. Die weiteren Summanden entfallen, da die Ableitungen ab der Ordnung n+1 verschwinden.

In einigen Fällen existieren die gewünschten Ableitungen nicht, oder zumindest nicht an der Stelle $x_0 = 0$. Dann weicht man auf eine andere Stelle aus:

Beispiel: f (x) = ln x – x

f' (x) = 1/x – 1 f'' (x) = – $1/x^2$ f'''(x) = $2/x^3$

Lässt sich an der Stelle x0 = nicht entwickeln, da die Funktion und ihre Ableitungen dort nicht definiert sind. Also entwickeln wir bei $x_0 = 1$:

f(1) = – 1 f' (1) = 0 f'' (1) = – 1 f''' (1) = 2

$$t_3(x) = -1 + 0 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{2}{6} \cdot (x-1)^3$$

Auch hier wollen wir kurz die die Genauigkeit der Näherung prüfen.

x	f (x)	$t_2(x)$	$t_3(x)$	$t_4(x)$	$t_5(x)$
0,500000	-1,193147	-1,125000	-1,166667	-1,182292	-1,188542
0,600000	-1,110826	-1,080000	-1,101333	-1,107733	-1,109781
0,700000	-1,056675	-1,045000	-1,054000	-1,056025	-1,056511
0,800000	-1,023144	-1,020000	-1,022667	-1,023067	-1,023131
0,900000	-1,005361	-1,005000	-1,005333	-1,005358	-1,005360
1,000000	-1,000000	-1,000000	-1,000000	-1,000000	-1,000000

So entsteht an einer beliebigen Entwicklungsstelle x_0 die Taylorreihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \; .$$

Damit stellt sich die Mac Laurinsche Reihe als Sonderfall der Taylorreihe für $x_0 = 0$ heraus.

Beispiel: Entwicklung von f (x) = tan (x) an der Stelle $x_0 = \pi/4$:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$f''(x) = 2\tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot (1 + \tan^2(x)) + 6 \cdot \tan^2(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$$
$$= 2 + 8 \cdot \tan^2(x) + 6 \cdot \tan^4(x)$$

$$f''''(x) = 16\tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) + 24\tan^3(x) \cdot (1 + \tan^2(x))$$
$$= 16\tan(x) + 40\tan^3(x) + 24\tan^5(x)$$

Mit tan(π/4) = 1 ergibt sich:

f (π/4) = 1 f'(π/4) = 2 f''(π/4) = 4 f'''(π/4) = 16 f''''(π/4) = 80

Dann ist:

$$t_4(x)=1+\frac{2}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{16}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{80}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$
$$=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{10}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

Für viele gängige Funktionen gibt es Reihenentwicklungen in Formelsammlungen aufgelistet. Dabei ist stets auch ein Konvergenzradius angegeben. Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ wird berechnet mit der Formel: $r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$. Liegt x innerhalb des Intervalls $(x_0 - r\,;\, x_0 + r)$, so konvergiert die Potenzreihe und ist als Näherung für die Funktion brauchbar.

Beispiele: 1) Der Konvergenzradius der geometrischen Reihe beträgt:

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1.$$

2) Der Konvergenzradius der Potenzreihe der Sinusfunktion beträgt:

$$r=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(2k-1)!}}{\frac{1}{(2k+1)!}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)!}{(2k-1)!}\right|$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)\cdot(2k)\cdot(2k-1)!}{(2k-1)!}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|(2k+1)\cdot(2k)\right|=\infty$$

Die Sinusreihe konvergiert also auf ganz IR.

Bei gebrochenrationalen Funktionen ist manchmal sinnvoll, das Zählerpolynom an einer Polstelle zu entwickeln.

Beispiel: Zur Funktion $f(x)=\frac{x^4+2x^3-3x^2+1}{(x-1)^3}$ soll das Zählerpolynom an der Nullstelle des Nenners entwickelt werden.

$z(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$	$z(1) = 1$
$z'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x$	$z'(1) = 4$
$z''(x) = 12x^2 + 12x - 6$	$z''(x) = 18$
$z'''(x) = 24x + 12$	$z'''(x) = 36$
$z''''(x) = 24$	$z''''(x) = 24$

Damit ergibt sich für das Zählerpolynom eine endliche Reihe:

$$z(x)=1+\frac{4}{1}(x-1)+\frac{18}{2}(x-1)^2+\frac{36}{6}(x-1)^3+\frac{24}{24}(x-1)^4$$
$$=1+4(x-1)+9(x-1)^2+6(x-1)^3+(x-1)^4$$

Da die Reihe endlich ist, führt eine Ersetzung des Zählerpolynoms durch die Reihe nicht zu einer Näherung sondern zu einer exakten Ersetzung. Dies ergibt für die Funktion f selbst eine hilfreiche Zerlegung:

$$f(x)=\frac{1+4(x-1)+9(x-1)^2+6(x-1)^3+(x-1)^4}{(x-1)^3}.$$
$$=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{9}{(x-1)}+6+(x-1)$$

10. Regel von L'Hospital

Mit Hilfe von Ableitungen lassen sich jetzt auch Grenzwerte von Funktionen bestimmen, die bisher nicht bestimmbar waren. Hierbei handelt es sich um Grenzwerte von so genannten unbestimmten Ausdrücken wie z.B. „$\frac{0}{0}$" „$\frac{\infty}{\infty}$" „$0 \cdot \infty$" „$\infty - \infty$" „1^{∞}" „∞^{0}". Für solche Ausdrücke gilt die Grenzwertregel von Bernoulli – L'Hospital:

Satz: Sind g und h differenzierbar in der Nähe einer Stelle x_0, und gilt: $\lim_{x \to x0} g(x) = \lim_{x \to x0} h(x) = 0$ oder $\lim_{x \to x0} g(x) = \lim_{x \to x0} h(x) = \infty$, so gilt:

$$\lim_{x \to x0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x0} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Beweis: (für $\lim_{x \to x0} g(x) = \lim_{x \to x0} h(x) = 0$)

Sind g und h differenzierbar, so kann man beide Funktionen in einer Taylorreihe an der Stelle x_0 entwickeln:

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots}{h(x_0) + \frac{h'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{h''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{h'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots}$$

$$= \frac{\frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots}{\frac{h'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{h''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{h'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots}$$

$$= \frac{\frac{g'(x_0)}{1!} + \frac{g''(x_0)}{2!}(x-x_0)^1 + \frac{g'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \ldots}{\frac{h'(x_0)}{1!} + \frac{h''(x_0)}{2!}(x-x_0)^1 + \frac{h'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^2 + \ldots}$$

Beim Grenzwertübergang $x \to x_0$ verbleiben in Zähler und Nenner nur die jeweils ersten Summanden. Somit gilt die Regel.

Beispiel: g (x) = sin (x) h (x) = x

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Die Regel gilt auch, falls die Funktionen g und h an der Stelle x_0 beide ins Unendliche Streben. In einigen Fällen führt die Regel von Bernoulli – L'Hospital erst nach mehrfacher Anwendung zu einem Ergebnis.

Beispiele:

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{3x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6e^{3x}} = 0$

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 6}{6x^2 - 4x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{12x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Man beachte stets, ob die Voraussetzungen noch erfüllt sind, d.h. es muss ein unbestimmter Ausdruck vorliegen.

Beispiel: $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{2x}\neq\lim_{x\to 3}\frac{2}{2}=1$$

Vielmehr gilt: $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{2x}=\frac{5}{6}$$

Die Regel gilt nur für Quotienten, bei denen Zähler und Nenner beide gleichzeitig gegen 0 oder gegen ∞ streben, d.h. für Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$" „$\frac{\infty}{\infty}$". Andere unbestimmte Ausdrücke werden durch geeignete Umformungen auf die Regel von Bernoulli – L'Hospital zurückgeführt.

Typ $0\cdot\infty$

u (x) · v (x) $\to 0\cdot\infty$, dann betrachte: $\dfrac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$.

Beispiele:

1) $$\lim_{x\to 0}[x\cdot\ln(x)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x)}{1/x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1/x}{-1/x^2}\right]=\lim_{x\to 0}[-x]=0$$

2) $$\lim_{x\to\pi/2}\left[\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}\cdot\tan(x)\right]=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan(x)}{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}}}=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)}{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-1,5}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{3/2}}{\cos^2(x)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}}{2\cos(x)\sin(x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{-\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}}{-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)}\right]=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}}{4\sin^2(x)+4\cos^2(x)}\right]=\frac{3}{0(4+0)}=\infty$$

Typ $\infty-\infty$

u (x) – v (x) $\to\infty-\infty$, dann betrachte: $\dfrac{\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{v(x)\cdot u(x)}}$

Beispiel:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\sin(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cdot\cos(x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\cdot\sin(x)}\right]=\frac{0}{2}=0$$

<u>Typ 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞</u>

u $(x)^{v(x)} \to 0^0$; ∞^0 ; 1^∞ , dann betrachte: $e^{v(x)\cdot\ln(u(x))}$

Beispiele: 1) $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$ Typ 1^∞

Wir untersuchen das Grenzwertverhalten des Exponenten:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]=1$$

Also folgt: $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]=e^1=e$

2) $\lim_{x\to\pi/2}\left[(\tan(x))^{\cos(x)}\right]=\lim_{x\to\pi/2}e^{\cos(x)\cdot\ln(\tan(x))}$ Typ ∞^0

Wir untersuchen das Grenzwertverhalten des Exponenten:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left[\cos(x)\cdot\ln(\tan(x))\right]=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\tan(x))}{\frac{1}{\cos(x)}}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\tan(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)}\cdot\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\right]=\frac{0}{1}=0$$

Also folgt: $\lim_{x\to\pi/2}\left[(\tan(x))^{\cos(x)}\right]=e^{\lim_{x\to\pi/2}\cos(x)\cdot\ln(\tan(x))}=e^0=1$

Die Anwendung der Regel von L'Hospital führt nicht immer zum Ziel. Manchmal muss man andere Wege gehen.

Beispiel: $\lim_{x\to\infty}\left[\sinh(x)\cdot e^{-x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sinh(x)}{e^x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cosh(x)}{e^x}\right]$

Auch wiederholtes ableiten führt hier nicht weiter, da sich sinh und cosh im Zähler ständig abwechseln. Stattdessen betrachte man die Darstellung des sinh als Kombination von e – Funktionen:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sinh(x)\cdot e^{-x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot e^{-x}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left[1-e^{-2x}\right]=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

11. Anwendungen

Ist eine Messgröße als Funktion einer anderen Größe bekannt, so führt die Ableitung oftmals wieder zu einer sinnvollen Messgröße. Daraus ergeben sich dann manchmal auch verschiedene neue mathematische Fragestellungen. Dies soll exemplarisch an einigen Beispielen gezeigt werden.

Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Das Weg – Zeit – Gesetz einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung lautet:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

Leitet man dies nach der Zeit ab, so erhält man das Geschwindigkeits – Zeit – Gesetz und als zweite Ableitung die Beschleunigung:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{s}(t) = at + v_0 \\ a(t) &= \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = a \end{aligned}$$

Dieser grundlegende Zusammenhang gilt auch für andere Bewegungsformen. Per Definition ist die Geschwindigkeit die Änderung des Ortes in Abhängigkeit von der Zeit, also die zeitliche Änderungsrate des Ortes, genau das, was wir als Ableitung definiert haben. Ebenso ist die Beschleunigung die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, also ebenfalls eine Änderungsrate.

Dies kann man ausnutzen, um ein Weg – Zeit – Gesetz aus einer gegebenen Kraft zu bestimmen. Wird etwa ein Körper mit der Masse m = 4 kg mit der Kraft F (t) = 4 t aus dem Stand heraus beschleunigt, so ist wegen F = ma die Beschleunigung a (t) = 3 t. Da dies die Ableitung des Geschwindigkeits – Zeit – Gesetzes ist, gilt folglich:

$$v(t) = \frac{3}{2}t^2 \quad und \quad s(t) = \frac{1}{2}t^3 .$$

Dies kann man auch auf Schwingungen anwenden. Das Auslenkungs – Zeit - Gesetz einer harmonischen Schwingung lautet:

$$y(t) = y_0 \sin\{\omega t\}$$

Damit ergeben sich als Ableitungen für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Pendelkörpers:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{y}(t) = y_0 \omega \cos(\omega t) \\ a(t) &= \ddot{y}(t) = -y_0 \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Handelt es sich um ein Federpendel mit der Rückstellkraft F = – D Δl, so erhält man mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ für die Schwingungsdauer des Pendels:

$$\begin{aligned} ma(t) &= F = -F_R = D\Delta l = Dy(t) \\ m \cdot y_0 \omega^2 \sin(\omega t) &= Dy_0 \sin(\omega t) \quad . \\ \omega^2 = \frac{D}{m} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \end{aligned}$$

Dampfdruck einer Flüssigkeit:

Der Zusammenhang zwischen dem Dampfdruck P und der Temperatur T einer Flüssigkeit ist gegebne durch $\ln(P) = -\frac{A}{RT} + C$, wobei A,C und R Konstanten sind. Gesucht ist die Änderungsrate $\frac{dP}{dT}$ des Drucks bei veränderter Temperatur.

Zunächst wird die Beziehung nach P aufgelöst und damit als Funktion P = P(T) dargestellt:

$$P(T) = e^{-\frac{A}{RT}+C} \quad \text{bzw.:} \quad P(T) = P_0 \cdot e^{-\frac{A}{RT}} \qquad \text{mit } P_0 = e^C .$$

Jetzt bilden wir die Ableitung und erhalten damit das gesuchte Differential:

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{A}{R} \cdot \frac{T^{-2}}{-1} \cdot P_0 \cdot e^{-\frac{A}{RT}} = \frac{AP_0}{RT^2} \cdot e^{-\frac{A}{RT}} .$$

Induktionsgesetz:

In einem Generator wird durch Drehung einer Spule in einem Magnetfeld eine Spannung erzeugt. Diese induzierte Spannung ist berechenbar mit dem Induktionsgesetz:

$$U_{ind}(t) = -n\dot{\Phi}(t).$$

Dabei ist $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos(\varphi)$ der magnetische Fluss durch die Spule. Dreht man die Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, so ergibt sich für den Winkel φ =ωt, und damit für die induzierte Spannung:

$$U_{ind}(t) = -nBA(-\omega\sin(\omega t)) = nBA\omega\sin(\omega t).$$

Entladung eines Kondensators:

Für die Ladung Q auf einem Kondensator der Kapazität C gilt: $Q = CU_C$. Wird dieser Kondensator über einen Widerstand R entladen, so gilt für den Stromfluss $U_R = RI$. Da beide Spannungen gleich groß aber gegeneinander gerichtet sein müssen ergibt sich:

$$\frac{Q(t)}{C} = -RI(t).$$

Da zudem die Stromstärke die zeitliche Änderung der Ladung ist, also I die Ableitng von Q ist, folgt:

$$Q(t) = -RC \cdot \dot{Q}(t)$$

Diese Gleichung wird erfüllt von der Funktion $Q(t) = Q_0\, e^{-kt}$. Durch Ableiten und Einsetzen erhält man für die Konstante k = 1/RC.