Algebra

1. Mengen und Zahlbereiche

Definition: Unter einer Menge M verstehen wir die Zusammenfassung gewisser, eindeutig unterscheidbarer Objekte zu einer Gesamtheit. Die einzelnen Objekte a, b …in der Menge nennen wir Elemente: M = {a, b,…}.

Mengen lassen sich in aufzählender Form, in beschreibender Form oder als Mengenbild darstellen.

Beispiele: P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, …} aufzählende Form
P = $\{n \in IN \mid n$ ist eine Primzahl.} beschreibende Form
{} bezeichnet die leere Menge.

Die Elemente einer Menge sind paarweise verschieden, d.h. kein Element tritt mehrfach auf. Die Reihenfolge der Nennung spielt keine Rolle, eine Menge ist stets ungeordnet. Wichtige Mengen sind die besonderen Zahlenmengen:

- IN = {0, 1, 2, 3, 4, 5, …} natürliche Zahlen
- Z = { …, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, …} ganze Zahlen
- $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z; q \in N \right\}$ Rationale Zahlen
- $IR = \left\{ k + r \middle| k \in Z; r = 0,a_1a_2a_3... = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + ... mit\ a_i \in \{0,1,2,..,8,9\} \right\}$
  Reelle Zahlen

Diese Zahlenmengen sind historisch gewachsen mit den mathematischen Fähigkeiten der Menschheit. Ausgehend von den natürlichen Zahlen zum Zählen und Nummerieren, wurden später die Brüche für Anteile und die negativen Zahlen vor allem für Temperatur- und Höhenangaben und für Schulden in der Finanzwelt eingeführt. Wesentlicher Mangel der rationalen Zahlen Q ist ihre Unvollständigkeit, d.h. zwischen zwei rationalen Zahlen gibt es noch Lücken, die nicht benannt werden können. Es gibt z.B. keine Zahl, die als Kantenlänge eines Quadrates den Flächeninhalt 2 ergibt. Die notwendige Kantenlänge ist $\sqrt{2}$, eine irrationale Zahl, die erst in den reellen Zahlen enthalten ist. Daher sind heute für uns die reellen Zahlen die wesentliche Grundlage der Anwendung von Mathematik in Naturwissenschaft und Technik.

Mengen werden häufig zur Beschreibung von Lösungsgesamtheiten von Gleichungen oder Ungleichungen benutzt.

Beispiel: Gesucht sind alle natürlichen Zahlen, deren Vierfaches vermehrt um 20 kleiner als 200 ist.
Dieser Satz ist gleichwertig mit der Ungleichung $4\,n + 20 < 200$.
Diese Ungleichung lässt sich auflösen zu $n < 180 : 4 = 45$.
Die Lösungsmenge lautet:
IL = {1, 2, 3, …, 43, 44}.

In diesem Zusammenhang treten auch Schnitt-, Vereinigungs- und Differenzmengen auf.

Definition: Die Schnittmenge $A \cap B$ zweier Mengen A und B enthält genau diejenigen Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ zweier Mengen A und B enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden Mengen enthalten sind.
Die Differenz- oder Restmenge A\B enthält genau die Element von A, die nicht auch in B enthalten sind.
$\overline{A}$ bezeichnet die Komplementmenge zu A: $\overline{A} = G \setminus A$.

Beispiel: M_1 sei die Menge der chemischen Elemente mit Ordnungszahl kleiner als 20.
M_2 sei die Menge der chemischen Elemente der zweiten Periode.
M_3 sei die Menge der Alkalielemente.
M_4 sei die Menge der Edelgase.
In aufzählender Form erhalten wir dann z.B.:
$M_1 \cap M_3 = \{Li, Na, K\}$
$M_2 \cup M_4 = \{Li, Be, B, C, N, O, F , Ne, He, Ar, Kr, Xe, Rn\}$
$M_2 \setminus (M_1 \cup M_4 = \{ Be, B, C, N, O, F\}$

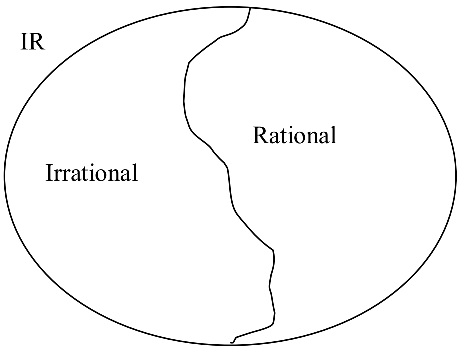
Zur Angabe von Definitions- und Wertebereichen im Zusammenhang mit Funktionen benötigt man Intervalle und Ausschlussmengen.

$[a;b] = \{x \in IR \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$(a;b) =]a;b[= \{x \in IR \mid a < x < b\}$	offenes Intervall
$[a;b) = [a;b[= \{x \in IR \mid a \leq x < b\}$	
$(a;b] =]a;b] = \{x \in IR \mid a < x \leq b\}$	halboffene Intervalle
$IR \setminus \{a\}$	Ausschluss der Zahl a
$IR \setminus [a;b]$	Ausschluss des Intervalls von a bis b

Intervalle, die ins Unendliche reichen, werden auf dieser Seite immer als offene Intervalle geschrieben:

$(a;\infty) =]a;\infty[= \{x \in IR \mid a < x\}$
$(-\infty;-b] =]-\infty;-b] = \{x \in IR \mid x < -b\}$

Zu den reellen Zahlen gehören alle endlichen Dezimalbrüche, alle periodischen Dezimalbrüche und alle nichtendlichen und nicht periodischen Dezimalbrüche. Endliche und periodische Dezimalbrüche lassen sich als echte Brüche schrieben und bilden in ihrer Gesamtheit die Rationalen Zahlen Q. Die nicht endlichen und nicht periodischen Dezimalbrüche nennt man auch die Irrationalen Zahlen.



Die reellen Zahlen besitzen eine Anordnung, d.h. es ist immer eindeutig entscheidbar, ob zwei Zahlen gleich sind bzw. welche von beiden größer ist. Für diese Anordnung < gilt:
$a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ Transitivität

Zur Kennzeichnung von Abständen und Entfernungen wird oftmals der Zahlenwert ohne Vorzeichen benötigt. Dafür hat man das Symbol des Betrages eingeführt:

Beispiel: $|-17| = 17$ $\quad |+13{,}25| = 13{,}25$
$|\cos(\pi)| = |-1| = 1$ $\quad |0| = 0$

2. Terme und Rechengesetze

Wichtigste Grundlage für alle Umformungsprozesse bei Termen und Gleichungen, für das Rechnen mit Vektoren und für Differentiationsregeln und Integrationsregeln sind die elementaren Rechengesetze:

- Die Division durch 0 ist nicht möglich.
- Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Distributivgesetz: $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$
  $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

Die Rechengesetze können zur Vereinfachung von Termen verwendet werden.

Definition: Ein Term besteht aus Zahlen, Variablen und Rechenoperatoren. Er enthält keine Vergleichszeichen.
Zwei Terme sind gleichwertig, wenn durch Einsetzen derselben Zahlen stets der gleiche Zahlenwert entsteht.

Beispiele: $T_1 (x;y) = 3x + 2 (y - 6x) + 5$
$T_2 (x;y) = 7 (x - 3) + 2 (y - 8 x + 13)$
Wir setzen Zahlen ein:
$T_1 (3;1) = - 20$ $T_2 (3;1) = - 20$
Beide Terme liefern die gleiche Zahl, was kein Zufall ist, denn beide lassen sich vereinfachen zu:
$T (x;y) = - 9x + 2 y + 5$
sind also gleichwertig.
$T_3 (x) = x^2$ und $T_4 (x) = 2x$
liefern zwar für $x = 2$ auch den gleichen Wert, aber das ist Zufall.
Es gilt $T_3(3) = 9$ $T_4 (3) = 6$.
Diese Terme sind nicht gleichwertig.

Bei der Umformung eines Terms kommen alle Rechengesetze zum Einsatz.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& 4 (3x - 2y) - 3 x (7 - 2x) + 3 x^2 & \\
&= 12 x - 8 y - 21 x + 6 x^2 + 3 x^2 & \text{DG} \\
&= 6 x^2 + 3 x^2 + 12 x - 21 x - 8 y & \text{KG} \\
&= (6 + 3) x^2 + (12 - 21) x - 8 y & \text{AG / DG} \\
&= 9 x^2 - 9 x + 8 y &
\end{aligned}
$$

Das Distributivgesetz ist insbesondere zur Zerlegung in Linearfaktoren heranzuziehen.

Beispiele: $xy - ry + xs - rs$
$= (x - r) y + (x - r) s = (x - r)(y + s)$
$x^2 - 6xy + 9 y^2$
$= x^2 - 3 xy - 3xy + 9 y^2 = (x - 3y) (x - 3y) = (x - 3y)^2$
$20ax + 16bx - 4cx - 30ay - 24by + 6cy$
$= (5a + 4b - c)\cdot 4x - (5a + 4b - c)\cdot 6y = (5a + 4b - c)\cdot(4x - 6y)$

Besondere Anforderungen stellen Bruchterme.

Beispiele: 1) Zur Addition und Subtraktion:

$$\frac{8+5n}{n+1}-\frac{7a+3}{5a-3}+\frac{18n+27-15a}{5an-3n+5a-3}$$

$$=\frac{(8+5n)\cdot(5a-3)}{(n+1)\cdot(5a-3)}-\frac{(7a+3)\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(5a-3)}+\frac{18n+27-15a}{(n+1)\cdot(5a-3)}$$ DG

$$=\frac{40a-24+25an-15n-7an-7a-3n-3+18n+27-15a}{(n+1)\cdot(5a-3)}$$ KG

$$=\frac{18a+18an}{(n+1)\cdot(5a-3)}=\frac{18a\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(5a-3)}=\frac{18a}{(5a-3)}$$ AG

2) Zur Multiplikation und Division:

$$\frac{4a+8}{12b-6}\cdot\frac{3a-6}{4b+2}:\frac{a+2}{5+10b}$$ Kehrbruch

$$=\frac{4(a+2)}{6(2b-1)}\cdot\frac{3(a-2)}{2(2b+1)}\cdot\frac{5(1+2b)}{a+2}$$ Ausklammern / DG

$$=\frac{2\cdot 1\cdot(a-2)\cdot 5}{2\cdot(2b-1)\cdot 1\cdot 1}=\frac{5(a-2)}{2b-1}$$ Kürzen

3) Kürzen nach Faktorisierung:

$$\frac{3abm-4cdm-3abn+4cdn}{6abx-8cdx}$$

$$=\frac{(3ab-4cd)m-(3ab-4cd)n}{(3ab-4cd)\cdot 2x}=\frac{(3ab-4cd)\cdot(m-n)}{(3ab-4cd)\cdot 2x}$$

$$=\frac{m-n}{2x}$$

4) Doppelbrüche:

$$\frac{\frac{4a-5b}{5x}-\frac{2a-3b}{3y}}{\frac{12y-10x}{15b}-\frac{y-x}{a}}=\frac{\frac{12ay-15by-10ax+15bx}{15xy}}{\frac{12ay-10ax-15by+15bx}{15ab}}$$

$$=\frac{12ay-15by-10ax+15bx}{15xy}\cdot\frac{15ab}{12ay-10ax-15by+15bx}$$

$$=\frac{ab}{xy}$$

3. Potenzen und Wurzeln

Für Potenzen gelten folgende Gesetze:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiel:

$$\frac{24x^{-3}y \cdot 14a^2b^{-1}}{8a^3b \cdot 21x^{-5}y^3} = \frac{24 \cdot 14}{8 \cdot 21} \cdot a^2a^{-3}b^{-1}b^{-1}x^{-3}x^5y^1y^{-3}$$

$$= 2 \cdot a^{-1}b^{-2}x^2y^{-2} = \frac{2x^2}{ab^2y^2}$$

Jede Wurzel lässt sich als Potenz schreiben:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Damit ergeben sich aus den Potenzgesetzen folgende Wurzelgesetze:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \qquad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}y^3}} = \sqrt[6]{x^{12}y^3} = \sqrt[6]{x^{12}} \cdot \sqrt[6]{y^3} = x^2 \cdot \sqrt{y}$

Man beachte: Die Wurzel- und Potenzgesetze beziehen sich stets auf Punktrechnungen. Für Summen und Differenzen gibt es keine zulässigen Umformungen!!!!
Addieren und subtrahieren lassen sich nur gleichartige Potenzen.

Beispiel: $17\,x^5y^3 - 26\,x^2c^6 + 13\,x^2\,y^3 - 15\,y^3\,x^5 - 11\,(xy)^2y + 24\,(xc^3)^2$
$= 17\,x^5y^3 - 15\,x^5y^3 - 26\,x^2c^6 + 24\,x^2c^6 + 13\,x^2y^3 - 11\,x^2y^3$
$= 2\,x^5y^3 - 2\,x^5y^3 - 2\,x^2\,c^6$

Eine oft benötigte Umformung ist das Rationalmachen des Nenners:

$$\frac{5 \cdot \sqrt[3]{x^4y}}{\sqrt[3]{5xy^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x^4y} \cdot \sqrt[3]{25x^2y}}{5xy} = \frac{5x^2 \cdot \sqrt[3]{25y^2}}{5xy} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{25y^2}}{y}$$

Ebenfalls oft benötigt wird die Polynomdivision, insbesondere bei der Bestimmung von Nullstellen von Funktionen und bei der Integration mit Partialbruchzerlegung oder bei der Bestimmung von Asymptoten gebrochener Funktionen.

Dabei wird eine Summe von Potenzen durch eine andere dividiert nach dem Verfahren der schriftlichen Division.

Beispiele: $(x^3 + 2\,x^2 - 19\,x - 20) : (x + 5) = x^2 - 3\,x - 4$
$(x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 19x^2 + 24x - 12) : (x^2 - 4\,x + 4) = x^3 + 3\,x^2 - 8\,x - 24$
$(16xy + 32xz + 24\,by + 48\,bz) : (4y + 8z) = 4x + 6b$
$(60\,x^2 + 25\,x^3 - 6 - 35\,x) : (-45 + 75\,x) = \frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{15}$

Das Potenzieren von Summen führt uns direkt zum Binomischen Lehrsatz. Unter einem Binom versteht man eine Summe (a + b) aus zwei Summanden. Besonders oft treten Binome quadratisch auf. Dann gilt:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Potenziert man jetzt eine solche Summe mit einem natürlichen Exponenten $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

Satz: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Die Binomialkoeffizienten berechnen sich dabei wie folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Diese Binomialkoeffizienten bilden das Pascalsche Dreieck:

$$\binom{0}{0}=1$$
$$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$
$$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$
$$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$$
$$\binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$$

Wir erkennen die Symmetrie: $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

und die Additionsregel: $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Mit Hilfe dieser Binomialkoeffizienten kann man jetzt Binompotenzen schnell und einfach ermitteln.

Beispiele: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4\,ab^3 + b^4$
$(2x+3y)^3 = 8\,x^3 + 36\,x^2\,y + 54\,xy^2 + 27\,y^3$
$(p-q)^5 = p^5 - 5p^4q + 10\,p^3q^2 - 10p^2q^3 + 5\,pq^4 - q^5$

Binome treten in vielen Zusammenhängen auf. Durch das Erkennen und entsprechende Umformungen lassen sich viele Rechnungen deutlich vereinfachen.

Beispiele: 1) Kürzen von Bruchtermen:

$$\frac{7x^2+14xy+7y^2}{10c^2-10d^2} : \frac{5x^3+15x^2y+15xy^2+5y^3}{2c^3-6c^2d+6cd^2-2d^3} \cdot \left(\frac{5(c+d)}{7(x^2-y^2)}\right)^3$$
$$= \frac{7(x+y)^2}{10(c+d)(c-d)} \cdot \frac{2(c-d)^3}{5(x+y)^3} \cdot \frac{125(c+d)^3}{343(x+y)^3(x-y)^3}$$
$$= \frac{5(c-d)^2(c+d)^2}{49(x+y)^4(x-y)^3}$$

2) Ziehen von Wurzeln:

$$\sqrt{x^4-4x^3z+6x^2z^2-4xz^3+z^4} = \sqrt{(x-z)^4} = (x-z)^2$$

3) Lösen von Gleichungen:

$13x^3+78x^2+156x+104=0$ führt auf:
$13\left(x^3+6x^2+12x+8\right)=0$
$13\cdot(x+2)^3=0$
und damit zu der Lösung $x = -2$.

4) Rationalmachen eines Nenners:

$$\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$$
$$= \frac{a\sqrt{ab}+ab-ba-b\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{(a-b)\sqrt{ab}}{a-b} = \sqrt{ab}$$

4. Logarithmen

Definition: Der Logarithmus einer Zahl a zur Basis b ist diejenige Zahl x, für die gilt $b^x = a$: $\log_b(a) = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a$ mit a, b > 0.

Im Allgemeinen verwenden wir den Logarithmus zur Basis 10 (dekadischer Logarithmus) oder den natürlichen Logarithmus mit der eulerschen Zahl e als Basis.

$$\log_{10}(a) = \lg(a) \qquad ; \qquad \log_e(a) = \ln(a)$$

Man beachte, dass die Zahl a dabei stets positiv sein muss. Man erkennt sofort:

$$\log_b(1) = 0 \quad ; \quad \log_b(b) = 1$$

Umformungsregeln für Logarithmen lassen sich aus den Potenzgesetzen ableiten.

Wir setzen voraus:

$$\begin{aligned} \log_b(x) = p &\quad \Leftrightarrow \quad b^p = x \\ \log_b(y) = q &\quad \Leftrightarrow \quad b^q = y \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Umformungen:

1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b\left(b^p \cdot b^q\right) = \log_b\left(b^{p+q}\right) = p + q = \log_b(x) + \log_b(y)$

2) $\log_b\left(x^r\right) = \log_b\left(\left(b^p\right)^r\right) = \log_b\left(b^{pr}\right) = pr = r \cdot \log_b(x)$

Von besonderer Bedeutung ist die Kettenregel. Wir setzen jetzt voraus:

$$\begin{aligned} \log_b(x) = v &\quad \Leftrightarrow \quad b^v = x \\ \log_b(a) = w &\quad \Leftrightarrow \quad b^w = a \\ \log_a(x) = z &\quad \Leftrightarrow \quad a^z = x \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & b^v = a^z \\ \Leftrightarrow \quad & \log_b\left(b^v\right) = \log_b\left(a^z\right) \\ \Leftrightarrow \quad & v \log_b(b) = z \log_b(a) \\ \Leftrightarrow \quad & \log_b(x) \cdot \log_b(b) = \log_a(x) \cdot \log_b(a) \\ \Leftrightarrow \quad & \log_b(x) = \log_a(x) \cdot \log_b(a) \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt: $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Damit lassen sich beliebige Logarithmen auf den dekadischen oder den natürlichen Logarithmus zurückführen, weshalb zur Berechnung von Logarithmen auf dem Taschenrechner auch nur diese vorhanden sind.

Beispiele: 1) Zur Berechnung mit der Kettenregel:

$$\log_4(32) = \frac{\log_2(32)}{\log_2(4)} = \frac{5}{2}$$

$$\log_7(63) = \frac{\ln(63)}{\ln(7)} \approx 2{,}13$$

2) Zur Umformung von Logarithmen:

$$3\lg(a^2) - 2\lg\left(\frac{1}{a}\right) + \lg(\sqrt[3]{a}) = 6\lg(a) + 2\lg(a) + \frac{1}{3}\lg(a)$$

$$= \frac{25}{3}\lg(a)$$

$$(\ln(v^2) - 3\ln(v^3)) : \left(\ln(\sqrt{v}) - \frac{1}{2}\ln(v^{-6})\right) = \frac{2\ln(v) - 9\ln(v)}{\frac{1}{2}\ln(v) + 3\ln(v)}$$

$$= \frac{-7\ln(v)}{3{,}5\ln(v)} = -2$$

3) Zum Beweis einer weiteren Logarithmenregel:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x \cdot y^{-1}) = \log_b(x) + \log_b(y^{-1}) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

4) Zur Anwendung beim pH – Wert:

3 l einer Lösung mit dem pH – Wert 6 werden mit 7 l einer Lösung mit dem pH – Wert 4 gemischt, ohne dass eine chemische Reaktion eintritt. Gesucht ist der pH – Wert der Mischung. Es gilt:

$6 = -\lg(c_1)$ *bzw.* $10^{-6} = c_1$ *und* $4 = -\lg(c_2)$ *bzw.* $10^{-4} = c_2$

Die Konzentration der Mischung ist dann:

$$c_M = \frac{3c_1 + 7c_2}{3+7} = \frac{3 \cdot 10^{-6} + 7 \cdot 10^{-4}}{10} = 7{,}03 \cdot 10^{-5}$$

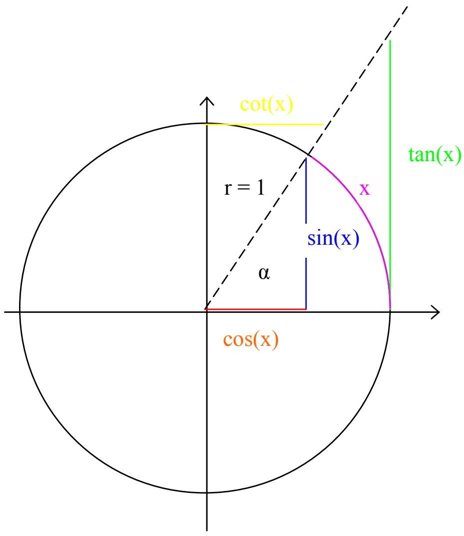
Daraus ergibt sich der pH – Wert zu

$$pH = -\lg(7{,}03 \cdot 10^{-5}) = -(\lg(7{,}03) + \lg(10^{-5})) = -\lg(7{,}03) + 5 \approx 4{,}15$$

5. Trigonometrische Terme

Die trigonometrischen Funktionen Sinus (sin), Kosinus (cos), Tangens (tan) und Kotangens (cot) sind einerseits reelle Funktionen, d.h. sie ordnen jeder reellen Zahl (mit Einschränkungen) als Funktionswert ebenfalls eine reelle Zahl zu. In dieser Eigenschaft eignen sie sich zur Beschreibung von Schwingungs- und Wellenvorgängen aller Art. Andererseits stellen diese Funktionswerte Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks her und ermöglichen so eine Vielzahl geometrischer Berechnungen.

Definition: Das Bogenmaß x eines Winkels α ist die Länge des Kreisbogens mit dem Radius r = 1 zum Mittelpunktswinkel α.



Für den Zusammenhang zwischen Bogenmaß x und Gradmaß α gilt:

$$x = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$$

In der Geometrie benutzt man in der Regel die Winkel im Gradmaß, da diese mit Hilfe eines Winkelmessers gezeichnet oder gemessen werden, der im Gradmaß geeicht ist. In der Funktionenlehre und der Gleichungslehre verwendet man das Bogenmaß x des Winkels.

Definition: Der Winkel definiert mit Hilfe zweier Tangenten und zweier Sehnen (jeweils eine parallel zur x – Achse und parallel zur y – Achse) insgesamt vier Strecken. Die Längen dieser vier Strecken sind gleich den vier Funktionswerten der vier trigonometrischen Funktionen.

Für α = 90° bzw. x = π/2 ist der Tangens dann nicht definiert, für α = 0° bzw. x = 0 der Kotangens. Sinus und Kosinus sind stets definiert.

Betrachten wir jetzt Winkel zwischen 90° bzw. π/2 und 180° bzw. π, so ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x) \qquad \cot(\pi - x) = -\cot(x)$$

Vergrößern wir die Winkel weiter, zunächst bis 360° bzw. 2π, so können wir weitere Zusammenhänge ablesen:

$$\sin(2\pi - x) = -\sin(x) \quad \cos(2\pi - x) = \cos(x) \quad \tan(2\pi - x) = -\tan(x) \quad \cot(2\pi - x) = -\cot(x)$$

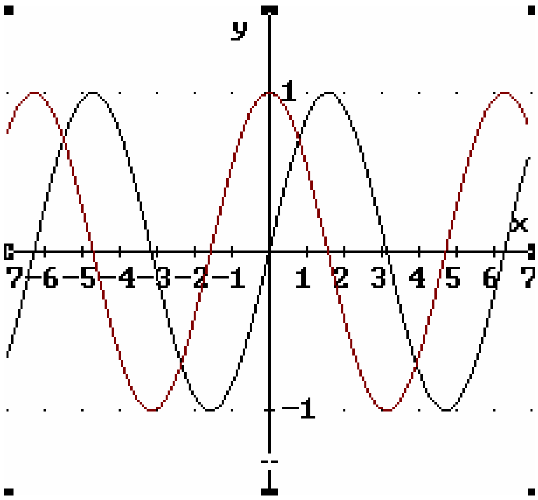
Überschreiten wir die Grenze von 360° bzw. 2π, so wiederholen sich die Werte periodisch:

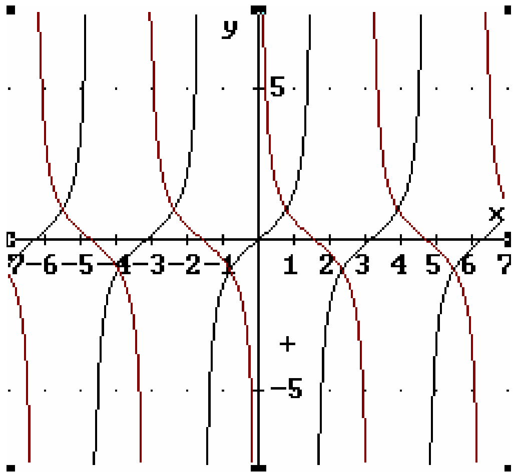
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Für den Tangens und den Kotangens gilt das bereits nach einem Halbkreis oder 180° bzw. π:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x) \quad \cot(x + \pi) = \cot(x)$$

Betrachten wir jetzt beliebig viele weitere Umläufe und lassen auch Umläufe in entgegen gesetzter Orientierung zu, so kann die Bogenlänge x alle reellen Zahlen durchlaufen. Die zugehörigen Funktionswerte wiederholen sich dabei periodisch, so dass folgende Funktionsgraphen entstehen:





Zwischen den vier trigonometrischen Funktionen bestehen zahlreiche Beziehungen, die sich in verschiedene Gruppen einteilen lassen. Hier eine kurze Auswahl:

Beziehungen zwischen Funktionswerten bei verschiedenen Winkeln:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \sin(2\pi - x) = -\sin(x)$$

Beziehungen zwischen den Funktionen bei gleichen Winkeln:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \tan(x) \cdot \cot(x) = 1$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad 1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Additionstheoreme:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Mehrfache Winkel:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$
$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

Einen halbwegs vollständigen Überblick über die Vielzahl dieser Beziehungen kann nur eine umfangreiche Formelsammlung geben.

Zur konkreten Arbeit mit trigonometrischen Funktionen sind noch ihre Umkehrfunktionen wichtig.

Definition: Umkehrfunktionen

Für alle x ∈ [– π ; π] gelten:
$$\sin(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin(a) = x$$
$$\cos(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \arccos(a) = x$$

Für alle x ∈ [– π/2 ; π/2] gelten:
$$\tan(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(a) = x$$
$$\cot(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad arc\cot(a) = x$$

Beispiele: 1) Bestimmung eines Winkels:

Ist $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so gilt $x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853$

2) Bestimmung aller Winkel im Basisintervall [0 ; 2π]:

Ist $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, so gilt: $x = \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Wegen cos (2π – x) = cos (x), gilt aber auch $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

3) Bestimmung aller Winkel:

Ist $\tan(x) = 1$, so gilt: $x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Die Tangensfunktion besitzt innerhalb ihrer Basisintervalls [– π/2 ; π/2] keine zweite Lösung. Aber im Abstand von π, d.h. der Intervalllänge wiederholen sich die Lösungen unendlich oft:

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi \quad x_3 = \frac{\pi}{4} \quad x_{-1} = \frac{\pi}{4} - \pi$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen, die sich mit einem Index k nummerieren lassen: $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, wobei k eine ganze Zahl sein muss: k ∈ Z.

Zur Bestimmung aller Lösungen sind zwei Dinge zu beachten:

1) Sinusfunktion und Kosinusfunktion besitzen innerhalb des Basisintervalls [0;2π] zwei verschiedene Lösungen, für die gilt:
$x_2 = \pi - x_1$ bei der Sinusfunktion
$x_2 = 2\pi - x_1$ bei der Kosinusfunktion.

2) Alle im Basisintervall gefundenen Lösungen wiederholen sich mit der Periode der Funktion, d.h.
$x_k = x_0 + k\pi$ für Tangens- und Kotangensfunktion
$x_k = x_0 + 2k\pi$ für Sinus- und Kosinusfunktion

Zum Abschluss noch ein wichtiger Umstand. Eine Funktion und ihre Umkehrfunktion heben sich gegenseitig auf. Es gilt konkret innerhalb des jeweiligen Basisintervalls:

$$\sin[\arcsin(x)] = x \quad \cos[\arccos(x)] = x \quad \tan[\arctan(x)] = x \quad \cot[arc\cot(x)] = x$$
$$\arcsin[\sin(x)] = x \quad \arccos[\cos(x)] = x \quad \arctan[\tan(x)] = x \quad arc\cot[\cot(x)] = x$$

Nach diesem Überblick über die Grundlagen der trigonometrischen Funktionen können wir die Umformungsregeln und Zusammenhänge nutzen, um Terme zu vereinfachen.

Beispiele: 1) Zusammenfassen:

$$\tan(\pi - x)\cdot\cos^2(x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}\cdot\cos^2(x) = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)}\cdot\cos^2(x)$$

$$= -\sin(x)\cos(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\begin{aligned}\tan(2x)\cdot\cos(2x) - \cot(x)\cdot\sin^2(x) &= \sin(2x) - \cos(x)\cdot\sin(x)\\ &= 2\cdot\sin(x)\cos(x) - \cos(x)\cdot\sin(x)\\ &= \sin(x)\cos(x)\\ &= \frac{1}{2}\cos(2x)\end{aligned}$$

2) Kürzen von Brüchen:

$$\frac{\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)} = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos(x) - \sin(x)} = \cos(x) + \sin(x)$$

$$\frac{\sin(\pi - x)}{\cos(x - \pi)}\cdot\frac{\sqrt{\cos(2x) + \sin^2(x)}}{\sin(2x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\sqrt{\cos^2(x)}}{2\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

3) Kompensieren der Umkehrfunktion:

$$\frac{x^2 - 9}{\cot\left(\arctan\left(\frac{1}{x+3}\right)\right)} = \left(x^2 - 9\right)\cdot\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x+3}\right)\right) = \left(x^2 - 9\right)\cdot\frac{1}{x+3} = x - 3$$

$$ar\cos\left(\sqrt{1 - \sin^2(x+5)}\right) - 10 = ar\cos(\cos(x+5)) - 10 = x - 5$$

6. Gleichungen

Grundlegendes Handwerkszeug ist der Umgang mit allen Arten von Gleichungen. Ein Problem zu mathematisieren bedeutet stets, eine Gleichung aufzustellen. Die Lösung der Gleichung führt dann im Allgemeinen auch zur Lösung des Problems. Die einzelnen Umformungsschritte benutzen stets eine Gegenoperation zu einer aufzulösenden Rechenoperation.

Operation	Gegenoperation
Addition	Subtraktion
Multiplikation	Division
n-te Potenz	n-te Wurzel
Exponentialausdruck	Logarithmus
Sin, cos, tan, cot	arcsin, arccos, arctan, arccot

Lineare Gleichungen:

$$3\cdot(3x-2)^2+(3x-4)(6+2x)=7x\cdot(5x+4)-2(x+3)(x-3)$$
$$3\cdot\left(9x^2-12x+4\right)+18x+6x^2-24-8x=35x^2+28x-2\left(x^2-9\right)$$
$$33x^2-26x-12=33x^2+28x+18$$
$$-54x=30$$
$$x=-\frac{30}{54}=-\frac{5}{9}$$

Hier sind vor allem der binomische Lehrsatz und das Distributivgesetz zu beachten. Auch die Vorzeichen vor Klammern führen oft zu Fehlern.

Produkte:

Gelegentlich trifft man auf Gleichungen, bei denen ein Produkt null ergeben soll. Dann gilt der Satz:

Ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist.

Dies hilft dann mit einer Fallunterscheidung zu den Lösungen zu kommen.

$(3x - 96)\cdot(17 + 85\,x)\cdot(x^2 + 2) = 0$

Fall I:	$3x - 96 = 0$	$x = 32$
Fall II:	$17 + 85\,x = 0$	$x = -0{,}2$
Fall III:	$x^2 + 2 = 0$	führt auf keine weitere Lösung

$IL = \{-0{,}2\ ;\ 32\}\}$

Quadratische Gleichungen:

Zur Lösung quadratischer Gleichungen verwendet man die p – q – Formel. Dazu muss die Gleichung aber in eine bestimmte Form, die so genannte Normalform der quadratischen Gleichung gebracht werden.

$$x^2+px+q=0$$

besitzt die Lösungen

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Dies setzt voraus, dass der Term unter Wurzel, die Diskriminante positiv ist. Ist die Diskriminante null, so gibt es nur eine Lösung, nämlich – p/2, bei negativer Diskriminante keine.

$$5x^2 - 18x + 23 = 3x^2 + 8x - 49$$
$$2x^2 - 26x + 72 = 0$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{-13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-13}{2}\right)^2 - 36}$$
$$x_{1/2} = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 6{,}5 \pm 2{,}5$$
$$x_1 = 9 \qquad x_2 = 4$$

Alle quadratischen Gleichungen lassen sich in die Normalform bringen und dann mit Hilfe der p – q – Formel lösen.

Biquadratische Gleichungen:

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$
$$z^2 - 5z - 36 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36}$$
$$= \frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}$$
$$z_1 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = -3 \quad x_2 = 3$$
$$z_2 = -4 \qquad \Rightarrow \quad \textit{keine reellen Lösungen für } x$$
$$IL = \{-3;3\}$$

Bruchgleichungen:

$$\frac{x+8}{3x+3} + \frac{x+2}{2x+2} = 1$$
$$\frac{(x+8)\cdot(2x+2) + (x+2)\cdot(3x+3)}{(2x+2)\cdot(3x+3)} = \frac{1\cdot(3x+3)\cdot(2x+2)}{(3x+3)\cdot(2x+2)}$$
$$2x^2 + 2x + 16x + 16 + 3x^2 + 3x + 6x + 6 = 6x^2 + 6x + 6x + 6$$
$$5x^2 + 27x + 22 = 6x^2 + 12x + 6$$
$$0 = x^2 - 15x - 16$$
$$x_{1/2} = 7{,}5 \pm \sqrt{56{,}25 + 16} = 7{,}5 \pm 8{,}5$$
$$x_1 = 16 \qquad x_2 = -1$$

Wurzelgleichungen:

$$3-\sqrt{12-33x}=6x$$
$$3-6x=\sqrt{12-33x}$$
$$9-36x+36x^2=12-33x$$
$$36x^2-3x-3=0 \qquad IL=\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right\}$$
$$x^2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{12}=0$$
$$x_{1/2}=\frac{1}{24}\pm\sqrt{\frac{1}{576}+\frac{48}{576}}=\frac{1}{24}\pm\frac{7}{24} \qquad x_1=\frac{1}{3} \qquad x_2=-\frac{1}{4}$$

Bei Wurzelgleichungen ist eine Probe unerlässlich, da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. In unserem Fall sind beide Zahlen Lösungen der Wurzelgleichung.

$$5-x=\sqrt{2x+5}$$
$$25-10x+x^2=2x+5$$
$$x^2-12x+20=0$$
$$x_{1/2}=6\pm\sqrt{36-20}=6\pm4$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen lauten 10 und 2. Die Probe zeigt aber, dass 10 keine Lösung der Wurzelgleichung ist. Daher lautet die Lösungsmenge: IL = {2}

Exponentialgleichungen:

$$9\cdot7^{x-1}=5\cdot14^{x+2}$$
$$\ln\left(9\cdot7^{x-1}\right)=\ln\left(5\cdot14^{x+2}\right)$$
$$\ln(9)+(x-1)\cdot\ln(7)=\ln(5)+(x+2)\cdot\ln(14)$$
$$x\cdot(\ln(7)-\ln(14))=\ln(5)+2\ln(14)-\ln(9)+\ln(7)$$
$$x=\frac{\ln(5)+2\ln(14)-\ln(9)+\ln(7)}{(\ln(7)-\ln(14))}\approx-9{,}574$$

Es gibt auch eine Kombination mit anderen Verfahren:

$$6^{2x+4}-5\cdot6^{x+2}+4=0 \qquad mit \qquad z=6^{x+2}$$
$$z^2-5z+4=0$$
$$z_{1/2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}$$
$$z_1=1 \qquad x_1=\log_6(1)-2=-2$$
$$z_2=4 \qquad x_2=\log_6(4)-2\approx-1{,}27$$

Logarithmusgleichungen:

$$\lg(2x) = 2 \cdot \lg(x) + \lg(1+x)$$
$$\lg(2x) = \lg\left(x^2 \cdot (1+x)\right)$$
$$2x = x^3 + x^2 \qquad\qquad IL = \{1\}$$
$$x \cdot \left(x^2 + x - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$
$$x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -2$$

Bei dieser Gleichung ist die Vorbereitung mit Hilfe der Logarithmenregeln wichtig bevor durch Exponentieren der Logarithmus aufgelöst werden kann. Zudem ist – 2 keine Lösung, da der Logarithmus für negative Zahlen nicht definiert ist.

Trigonometrische Gleichungen:

Das besondere an den trigonometrischen Funktionen ist ihre Periodizität. Diese hat zur Folge, dass auch bei trigonometrischen Gleichungen unendlich viele Lösungen auftreten, wobei sich wenige echt verschiedene Lösungen periodisch wiederholen.

$$\sin(3x + \pi) = 5 \cdot \cos(3x + \pi)$$
$$\frac{\sin(3x + \pi)}{\cos(3x + \pi)} = 5$$
$$\tan(3x + \pi) = 5$$
$$3x_k + \pi = \arctan(5) + k\pi$$
$$x_k = \frac{1}{3}\arctan(5) + \frac{(k-1)\pi}{3}$$

Da die Tangensfunktion innerhalb ihrer Periode z.B. im Intervall $(-\pi/2\ ;\ +\pi/2)$ jeden Wert nur einmal annimmt, haben wir auch alle Lösungen gefunden. Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion nehmen innerhalb ihrer Periode z.B. im Intervall $[0\ ;\ 2\pi)$ jeden Wert zweimal an. Dies führt zu weiteren Lösungen.

$$\sin^2(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2} = 0 \qquad mit \qquad z = \sin(x)$$
$$z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0$$
$$z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$
$$z_1 = 1 \qquad x_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \pi - x_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} \qquad x_3 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad x_4 = \pi - x_3 = \frac{7}{6}\pi$$

Damit ergeben sich drei echte Lösungen innerhalb des Intervalls $[0\ ;\ 2\pi)$: $IL = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; \frac{11}{6}\pi\right\}$

Betragsgleichungen

Bei Betragsgleichungen ist eine Fallunterscheidung notwendig.

$$|4x-2| = x+4$$

$$4x-2 = \begin{cases} -(x+4) \\ +(x+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5x=-2 \\ 3x=6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-0{,}4 \\ x=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow IL = \{-0{,}4;2\}$$

Schwieriger wird es mit quadratischen Termen. Dann muss man die Fallunterscheidung anders aufschreiben.

$$|x-5| = x^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad x-5 = \begin{Bmatrix} +(x^2+1) \\ -(x^2+1) \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x>5 \\ x<5 \end{matrix}$$

Fall 1: $x^2-x+6=0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-6} \Rightarrow$ *keine Lösung*

Fall 2: $x^2+x-6=0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = -\frac{1}{2} \pm 2{,}5 \Rightarrow x_1=-3 \quad x_2=2$

Aus beiden Fällen zusammen ergibt sich somit:

$$IL = \{-3;2\}.$$

Eine Anwendung:

Für die reversible Reaktion $2HJ \Leftrightarrow H_2 + J_2$ gilt im Gleichgewicht für die Konzentrationen die Beziehung $\frac{c_{H_2} \cdot c_{J_2}}{c_{HJ}^2} = 0{,}2$. Bestimmen Sie die Gleichgewichtskonzentration von H_2 für den Fall, dass anfangs die Konzentration von HJ 0,5 mol/l beträgt und anfangs weder Jod noch Wasserstoff vorhanden waren.

Die Konzentrationen c_{H_2} *und* c_{J_2} müssen gleich sein, da die Moleküle in gleicher Menge entstehen.
Ferner gilt: Für ein Mol H_2 bzw. J_2 müssen zwei Mol HJ zersetzt werden. Folglich ist die Differenz der Konzentration von HJ zur Anfangskonzentration 0,5 mol/l doppelt so groß, wie die Konzentration von H_2 bzw. J_2 :

$c_{HJ} = 0{,}5\, {}^{mol}\!/\!_{l} - 2c_{H_2}$.

Dies führt zu der Gleichung $\quad {c_{H_2}}^2 = 0{,}2 \cdot (0{,}5 - 2c_{H_2})^2$

$$c_{H_2}^2 = 0{,}05 - 0{,}4c_{H_2} + 0{,}8c_{H_2}^2$$

Lösung: $\quad c_{H_2}^2 + 2c_{H_2} - 0{,}25 = 0$

$$c_{H_2} = -1 \pm \sqrt{1+0{,}25} = -1 \pm 1{,}118$$

Sinnvolle Lösung ist nur $c_{H_2} = 0{,}118$ und damit $c_{J_2} = 0{,}118$ und $c_{HJ} = 0{,}264$.

7. Lineare Gleichungssysteme

Bei Anwendungen mit mehr als einer Variablen benötigt man auch entsprechend mehr Bedingungen – sprich Gleichungen – zur Bestimmung der Lösung. Dadurch entsteht ein Gleichungssystem. Treten alle Variablen nur einzeln und ohne Potenzen auf, so sprechen wir von einem linearen Gleichungssystem. Zur Lösung solcher Systeme gibt es viele Verfahren. Die Grundidee ist bei allen Verfahren die Gleiche: Man versucht die Anzahl der Variablen zu reduzieren bis nur noch eine Gleichung mit einer Variablen verbleibt, die dann mit einem der bereits bekannten Verfahren gelöst werden kann.

Das Einsetzungsverfahren:

I $6x - 2y = 84$ und II $x \cdot y = 45$
I $y = 3x - 42$ und II $x \cdot y = 45$
I in II einsetzen liefert:
$x \cdot (3x - 42) = 45$
$x^2 - 42x = 45$
$x^2 - 14x - 15 = 0$ mit den Lösungen $x = 7 \pm 8$
$x_1 = 15$ $y_1 = 3$ ist eine Lösung
$x_2 = -1$ $y_2 = -45$ ist eine Lösung
$IL = \{(15;3) ; (-1; -45)\}$

Das Einsetzungsverfahren ist bei allen LGS anzuwenden, in denen Produkte oder Quotienten der Variablen auftreten. In solchen Fällen kann das im folgenden vorgestellte Additionsverfahren nicht zur Lösung führen, da sich die Variablen damit nicht eliminieren lassen.

Das Additionsverfahren:

I $4x + 26y = 67$ und II $3x - 39y = -37{,}5$
I $12x + 78y = 201$ und II $6x - 78y = -75$
I + II $18x = 126$
Also: $x = 7$
Und: $y = (67 - 4 \cdot 7) : 26 = 1{,}5$
$IL = \{(7 ; 1{,}5)\}$

Das Additionsverfahren wird wesentlich aufwändiger, wenn mehr als zwei Variablen und Gleichungen beteiligt sind. Dann ist es sehr hilfreich, wenn einige Schritte zusammengefasst und übersichtlich dargestellt werden. Dies sei hier gezeigt an einem Beispiel mit vier Variablen.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rrrrr}
x\,+ & 2y\,+ & 3z\,- & 4u = & 18 \\
2x\,+ & 3y\,- & 4z\,+ & 5u = & 10 \\
3x\,- & 4y\,+ & 5z\,+ & 6u = & 2 \\
-4x\,+ & 5y\,+ & 6z\,+ & 7u = & -6
\end{array}$$

Wir bringen dieses Gleichungssystem dadurch in die obere Dreiecksgestalt, dass wir zunächst aus den Gleichungen II bis IV die Variable x eliminieren:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x\,+ & 2y\,+ & 3z\,- & 4u = & 18 \\
II - 2 \bullet I & & -y\,- & 10z\,+ & 13u = & -26 \\
III - 3 \bullet I & & -10y\,- & 4z\,+ & 18u = & -52 \\
IV + 4 \bullet I & & 13y\,+ & 18z\,- & 9u = & 66
\end{array}$$

Als nächstes eliminieren wir aus den Gleichungen III und IV die Variable y, dann aus der letzten Gleichung z:

	x +	2 y +	3 z –	4 u =	18
– II		y +	10 z –	13 u =	26
III – 10 • II			96 z –	112 u =	208
IV + 13 • II			– 112 z +	160 u =	– 272

	x +	2 y +	3 z –	4 u =	18
		y +	10 z –	13 u =	26
III : 96			z –	1 1/6 u =	2 1/6
IV + 112/96 • III				29 1/3 u =	– 29 1/3

Daraus ergibt sich u = – 1, und dann durch schrittweises Einsetzen:
z = 2 1/6 + 1 1/6 u = 1
y = 26 + 13 u – 10 z = 3
x = 18 + 4 u – 3 z – 2 y = 5
Lösung ist dann das Quadrupel (5 ; 3 ; 1 ; – 1). Es gibt also genau 1 Lösung!

Das Ziel des Gaußschen Algorithmus ist es, das Gleichungssystem in eine Dreiecksgestalt zu bringen. Dabei soll auf der Diagonalen nur noch die 1 als Koeffizient auftreten.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems verändert sich nicht durch folgende Umformungen:

1) Zwei Gleichungen werden vertauscht.
2) Eine beliebige Gleichung wird mit einer von 0 verschiedenen Zahl multipliziert.
3) Zu einer Gleichung wird ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert.

Dies sind die erlaubten Äquivalenzumformungen für Gleichungssysteme, die wir auch im Einführungsbeispiel verwendet haben.

Sind alle Koeffizienten der rechten Seite gleich 0, so sprechen wir von einem homogenen Gleichungssystem. Es besitzt zumindest die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Falls ein homogenes System auch eine nichttriviale Lösung besitzt, so besitzt es stets unendlich viele Lösungen.

Ein inhomogenes System dagegen kann eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen.

Zur Vereinfachung der Schreibweise kann man sich auf die Koeffizientenmatrix beschränken, wie wir es in den folgenden Beispielen tun werden.

Beispiele: 1) homogenes System mit trivialer Lösung:

x – 2 y + 3 z = 0
2 x + 4 y – z = 0
– 3 x + 2 y + 5 z = 0

führt auf die vereinfachte Matrix

	x	y	z	
I	1	– 2	3	0
II	2	4	– 1	0
III	– 3	2	5	0
I' = I	1	– 2	3	0
II'=2 I – II	0	– 8	7	0
III'=3 I + III	0	– 4	14	0
I''	1	– 2	3	0
II''	0	1	– 7/8	0
III' + 4 II''	0	0	10 ½	0

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung 10,5 z = 0, also der Lösung z = 0, woraus sofort y = 0 und x = 0 folgen. Es bleibt nur die triviale Lösung IL = {(0;0;0)}.

2) homogenes System mit unendlich vielen Lösungen:

	x	y	z	
I	1	– 2	3	0
II	2	4	– 2	0
III	– 3	7	– 10	0
I'=I	1	– 2	3	0
II'=II – 2·I'	0	8	– 8	0
III'=III+3·I'	0	1	– 1	0
I''=I'	1	– 2	3	0
II''=III'	0	1	– 1	0
III''=II'– 8·II''	0	0	0	0

Die letzte Zeile entspricht der Gleichung 0 z = 0, so dass für z jede beliebige Zahl eingesetzt werden kann. Aus der gewählten Lösung für z folgen dann konkrete Werte für y und x, die nicht mehr beliebig wählbar sind.

Sei z = 1, dann folgt	– 8 y + 8 z = 0	y = 1
und	x – 2y + 3 z = 0	x = – 1.
Aber für z = 2 folgt:	– 8 y + 8 z = =	y = 2
und		x = – 2
Allgemein:	y = z und x = – 3z + 2 y = – z	

IL = {(– z ; z ; z) mit z ∈ IR}.

3) inhomogenes System ohne Lösung:

	x	y	z	
I	1	– 2	3	3
II	2	4	– 2	5
III	– 3	7	– 10	– 2
I'=I	1	– 2	3	3
II'=II – 2·I'	0	8	– 8	– 1
III'=III+3·I'	0	1	– 1	7
I''=I'	1	– 2	3	3
II''=III'	0	1	– 1	7
III''=II'– 8·II''	0	0	0	– 57

Die Vielfalt der Lösungsmöglichkeiten von Gleichungssystemen, bei denen die Anzahl der Variablen mit der Anzahl der Gleichungen nicht übereinstimmt, soll hier nicht behandelt werden.

Zum Schluss noch zwei Beispiel zur Anwendung inklusive des Aufstellens der notwendigen Gleichungen.

Beispiel 1: (Mischungsproblem) In einer Versuchsanlage stehen drei Sorten Dünger mit verschiedenen Zusammensetzungen zur Verfügung:

	I	II	III
K	40 %	30 %	50 %
N	50 %	20 %	30 %
P	10 %	50 %	20 %

Für Düngeversuche sollen 10 kg Blumendünger gemischt werden, der 40% Kalium, 35% Stickstoff und den Rest Phosphor enthält.
Die gesuchten Mengen seine x kg von Sorte I, y kg von II und z kg von III. Dann gilt für die einzelnen Substanzen:
Kalium: $0{,}4\,x + 0{,}3\,y + 0{,}5\,z = 0{,}4 \cdot 10$
Stickstoff: $0{,}5\,x + 0{,}2\,y + 0{,}3\,z = 0{,}35 \cdot 10$
Phosphor: $0{,}1\,x + 0{,}5\,y + 0{,}2\,z = 0{,}25 \cdot 10$
Dies übersetzen wir in unser Schema, wobei die Gleichung für Phosphor an die erste Stelle rückt, und alle Gleichungen mit 10 multipliziert werden:

x	y	z	
1	5	2	25
4	3	5	40
5	2	3	35
1	5	2	25
0	17	3	60
0	23	7	90
1	5	2	25
0	1	3/17	60/17
0	0	– 50/17	– 150/17

Die letzte Zeile ergibt z = 3 und somit y = 3 und x = 4.
Man nehme 4 kg von Sorte 1, und je 3 kg der Sorten I und III.

Beispiel 2: Beim Erhitzen auf über 400° C zersetzt sich Kaliumdichromat ($K_2Cr_2O_7$) in Kaliumchromat (K_2CrO_4), Chromoxid (Cr_2O_3) und Sauerstoff (O_2). Die Reaktionsgleichung lautet: $x_1\ K_2Cr_2O_7 \rightarrow x_2\ K_2CrO_4 + x_3\ Cr_2O_3 + x_4\ O_2$
mit zunächst unbekannten Werten für x_1, x_2, x_3, x_4. (Man erwartet natürlich ganzzahlige Werte > 0.) Für die drei beteiligten Elemente gelangt man zu den Gleichungen
K : $2x_1 = 2x_2$
Cr : $2x_1 = x_2 + 2x_3$
O : $7x_1 = 4x_2 + 3x_3 + 2x_4$
Wir können jetzt $x_4 \neq 0$ frei wählen. Mit $x_4 = 1$ erhalten wir zunächst
$x_3 = {}^2/_3$, $x_2 = {}^4/_3$, $x_1 = {}^4/_3$.
Die Reaktion gelingt auch mit Vielfachen dieser Lösung, da es nur auf das Mengenverhältnis ankommt. Die Wahl von x_4 war ungünstig. Durch Vervielfachung mit 3 erhalten wir die Reaktionsgleichung
$4\ K_2Cr_2O_7 \rightarrow 4\ K_2CrO_4 + 2\ Cr_2O3 + 3\ O_2$.

Determinantenverfahren:

Eine Alternative zum Gauß – Algorithmus findet man im Determinantenverfahren. Dazu werden die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems in eine Matrix geschrieben und dann deren Determinante berechnet. Die Lösungen ergeben sich dann als Quotient solcher Determinanten.

Beispiel:

x +	2 y +	3 z =	14
2 x +	3 y –	4 z =	15
3 x –	4 y +	5 z =	8

Schritt 1: Hauptdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (15 - 24 - 24) - (27 + 20 + 16) = -96$$

Ersetzen wir die erste Spalte durch die absoluten Glieder der rechten Seite des LGS, so erhalten wir die Determinante für die Variable x:

$$D_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 15 & 3 & -4 \\ 8 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (210 - 64 - 180) - (72 + 150 + 224) = -480$$

Die gesuchte Lösung lautet dann: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-480}{-96} = 5$.

Entsprechend:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 15 & -4 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = (75 - 168 + 48) - (135 - 32 + 140) = -288$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-288}{-96} = 3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 3 & 15 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = (24 + 90 - 112) - (126 - 60 + 32) = -96$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-96}{-96} = 1$$

Das Determinantenverfahren eignet sich nur zur Berechnung der Lösung eindeutig lösbarer Gleichungssysteme.

8. Komplexe Zahlen

Ein entscheidender Mangel der reellen Zahlen besteht darin, dass wir keine Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen können. Damit bleibt auch eine Vielzahl von Gleichungen unlösbar. Dies lässt sich beheben durch die Einführung einer neuen Zahl j als imaginäre Einheit mit folgender Eigenschaft: $j^2 = -1$

Mit Hilfe dieser imaginären Einheit definieren wir zunächst imaginäre Zahlen:

Definition: Zahlen in der Form a j mit reellem Faktor a heißen imaginäre Zahlen.

Die Quadrate dieser imaginären Zahlen ergeben dann genau alle negativen reellen Zahlen. Es gilt:

$$(3j)^2 = 9 \cdot j^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$
$$-13 = (-1) \cdot 13 = j^2 \cdot \left(\sqrt{13}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\,j\right)^2$$

Entsprechend ergibt das Quadrat jeder imaginären Zahl eine negative reelle Zahl, und jede negative reelle lässt sich als Quadrat einer imaginären Zahl auffassen.

Mit Hilfe dieser imaginären Einheit definieren wir die komplexen Zahlen:

Definition: Eine Zahl $z = a + bj$, die aus zwei reellen Zahlen a und b gebildet wird, heißt komplexe Zahl z. a heißt Realteil, b Imaginärteil der komplexen Zahl z. Die Menge aller komplexen Zahlen z bezeichnen wir mit C.

Beispiel: $z = 3 + 5j$
$\mathrm{Re}(z) = 3 \qquad \mathrm{Im}(z) = 5$

Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind gleich, wenn sie in Realteil und Imaginärteil übereinstimmen:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \text{ und } \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)\,.$$

Für das Rechnen mit komplexen Zahlen wird eine **Addition** definiert:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 j) + (a_2 + b_2 j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,j$$

Die **Multiplikation** ergibt sich durch konsequente Anwendung von Rechengesetzen:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 j) \cdot (a_2 + b_2 j) = a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 j + a_2 b_1 j + b_1 b_2 j^2$$
$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,j$$

Beispiele:

$$(5+4j)+(7+3j) = 12+7j$$
$$(5+4j)\cdot(7+3j) = (35-12)+(15+28)j = 23+43j$$

Die **Subtraktion** komplexer Zahlen ergibt sich wie bei den reellen Zahlen durch die Addition der Gegenzahl. Ist $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$, dann ist $-z_2 = -(c + dj) = -c - dj$ die Gegenzahl zu z_2 , und es gilt:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bj) + (-c - dj)$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 6j \qquad z_2 = 5 + 2j$

$z_1 - z_2 = (3 + 6j) - (5 + 2j) = (3 + 6j) + (-5 - 2j) = -2 + 4j$

Eine **Division** zweier komplexer Zahlen berechnet man am besten als Bruch, der geeignet erweitert wird. Diese Methode ist bekannt vom Rationalmachen des Nenners bei Wurzeltermen:

$$(a+bj):(c+dj) = \frac{a+bj}{c+dj} = \frac{a+bj}{c+dj} \cdot \frac{c-dj}{c-dj}$$
$$= \frac{ac - adj + bcj + bd}{c^2 + d^2}$$

Beispiel:

$$(3-4j):(1+2j) = \frac{3-4j}{1+2j} = \frac{3-4j}{1+2j} \cdot \frac{1-2j}{1-2j}$$
$$= \frac{3-6j-4j-8}{1+4} = \frac{-5-10j}{5} = -1-2j$$

Damit beherrschen wir die vier Grundrechenarten. Sie sind so beschaffen, dass die üblichen Rechengesetze (KG, AG und DG) weiterhin gelten. Zusätzlich zu diesen Rechenoperationen benötigen wir noch die konjugierte Zahl.

Definition: $z^* = a - bj$ heißt konjugiert zu $z = a + bj$

Beispiele:

$z = 3 + 2j \qquad z^* = 3 - 2j$

$z = -4 + j \qquad z^* = -4 - j$

$z = 3 - 6j \qquad z^* = 3 + 6j$

Für das Konjugieren komplexer Zahlen gelten folgende Regeln:

$(z^*)^* = ((a + bj)^*)^* = (a - bj)^* = a + bj = z$

$z \cdot z^* = (a + bj) \cdot (a - bj) = a^2 + b^2 = r^2 = |z|^2$

$z + z^* = (a + bj) + (a - bj) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$

$z - z^* = (a + bj) - (a - bj) = 2bj = 2 \operatorname{Im}(z)j$

Dies genügt zunächst, um umfangreiche Terme berechnen und einfache Gleichungen und Gleichungssysteme lösen zu können.

Beispiele: 1) Termberechnungen

$$\frac{(3+2j)^* - (j+1)}{2-j} + (1+j)^{-1} = \frac{3-2j-1-j}{2-j} + \frac{1}{1+j}$$
$$= \frac{2-3j}{2-j} \cdot \frac{2+j}{2+j} + \frac{1}{1+j} \cdot \frac{1-j}{1-j}$$
$$= \frac{4+2j-6j+3}{4+1} + \frac{1-j}{1+j}$$
$$= \frac{7-4j}{5} + \frac{1-j}{2} = \frac{14-8j+5-5j}{10}$$
$$= \frac{19-13j}{10} = 1{,}9 - 1{,}3j$$

2) Lineare Gleichungen

$(3 + j)\, z - (2 + j)^* + z - j = (z^* - j)^*$

$(3 + j)\, z - (2 - j) + z - j = z + j$

$(3 + j)\, z + z - z = (2 - j) + j + j$

$(3 - j)\, z = 2 + j$

$$z = \frac{2+j}{3-j} \cdot \frac{3+j}{3+j} = \frac{6+5j-1}{9+1} = \frac{5+5j}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} j$$

3) Quadratische Gleichungen

$z^2 + (2 - 4j)\, z + 6 - 4j = 0$

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= -1 + 2j \pm \sqrt{(-1+2j)^2 - 6 + 4j} \\ &= -1 + 2j \pm \sqrt{1 - 4j - 4 - 6 + 4j} \\ &= -1 + 2j \pm \sqrt{-9} \\ &= -1 + 2j \pm 3j \end{aligned}$$

$z_1 = -1 + 5j \qquad z_2 = -1 - j$

Veranschaulichung der komplexen Zahlen:

Die Komplexen Zahlen C stellen eine Erweiterung unseres bisherigen Systems von Zahlenmengen dar. Diese haben wir bisher auf der Zahlengeraden veranschaulicht.

Menge	**Funktion**	**Lösbare Gleichung**	**Unlösbare Gleichung**	**Darstellung**
IN	Zählen	$x - a = b$	$x + a = b$	Punkte
Z	Schulden	$x + a = b$	$x \cdot a = b$	Punkte
Q	Anteile	$x \cdot a = b$	$x^2 = a$	Gerade mit Lücken
IR	Irrationale Längen	$x^2 = a$	$x^2 = -a$	Gerade ohne Lücken
C	???	$x^2 = -a$	???	Ebene

Die reellen Zahlen sind vollständig, d.h. jede konvergente Folge reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert innerhalb der reellen Zahlen. Somit bleiben auf der Zahlengeraden keine Lücken mehr. Wir müssen die komplexen Zahlen deshalb in einer Ebene darstellen. Die Achsen dieser so genannten Gaußsche Zahlenebene heißen „reelle Achse“ und „imaginäre Achse“.

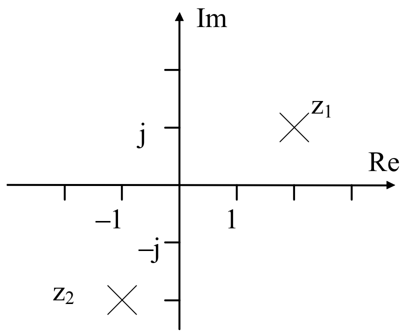


Abb. 1: Komplexe Zahlenebene

Beispiele: $z_1 = 2 + j \qquad z_2 = -1 - 2j$

Die konjugierten z_1^* und z_2^* ergeben sich dann durch Spiegelung an der reellen Achse.

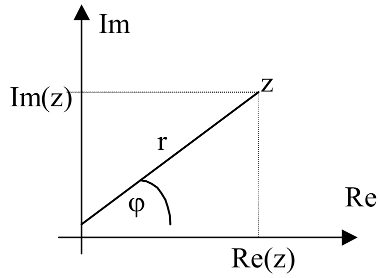
Die Verteilung der Zahlen in einer Ebene bedeutet zugleich, dass diese Zahlen nicht mehr nach der Größe geordnet werden können.!!!

Polarform:

Die Darstellung in der Ebene eröffnet eine zweite Möglichkeit, komplexe Zahlen zu schreiben. Jeder Punkt in der Ebene kann genau festgelegt werden

– entweder durch die Angabe der x – und der y – Koordinate, d.h. durch Realteil und Imaginärteil der entsprechenden komplexen Zahl
– oder durch Angabe des Abstandes r zum Ursprung und eines Richtungswinkels φ gegenüber der x – Achse (Abb. 2).

Diese zweite Variante führt zur Darstellung von Vektoren mit Hilfe von Polarkoordinaten und hier entsprechend zur Schreibweise der komplexen Zahlen in der Polarform:



Polarform komplexer Zahlen

Offenbar gilt:

a = Re(z) = r cos φ
b = Im(z) = r sin φ

Umgekehrt erhält man:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad und \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

Der Abstand r des Punktes z zum Nullpunkt heißt Betrag der komplexen Zahl, φ nennt man Argument oder Polarwinkel. Zur Unterscheidung der beiden Schreibweisen sprechen wir von der kartesischen Form z = a + bi und der Polarform komplexer Zahlen. Die Schreibweise in der Polarform lautet:

$$z = r\,(\cos\varphi + j \sin\varphi) = r\, e^{j\varphi}\,.$$

Die Darstellung in der Polarform ist zunächst allerdings nicht eindeutig. Eine Winkelangabe über 360° führt zu einer komplexen Zahl, die auch durch einen Winkel zwischen 0° und 360° beschrieben wird, z.B.:

$$r\,(\cos 405° + j \sin 405°) = r\,(\cos 45° + j \sin 45°)$$

Daher muss die Winkelangabe eingeschränkt werden: Für die Polarform einer komplexen Zahl legen wir fest:

$$-180° < \varphi \leq +180° \quad \text{bzw.} \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Außerdem führt die Berechnung des Winkels aus den kartesischen Koordinaten nicht zwingend zum gewünschten Ergebnis. Da die Tangensfunktion eine Periode von 180° bzw. π besitzt, erhält man bei Verwendung des Hauptzweiges aus

$$\varphi = arc\tan\frac{b}{a}$$

nur Werte zwischen – 90° und + 90°, so dass bei komplexen Zahlen mit negativem Realteil eine Korrektur um 180° bzw. π notwendig wird.

Beispiele: Umrechnung in die Polarform

$z_1 = 3 + 4j$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\varphi = arc\tan\frac{4}{3} = 53{,}13°$ $\qquad$ $z_1 = 5\,(\cos 53{,}13° + j \sin 53{,}13°)$

$z_2 = -3 + 4i$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\varphi = arc\tan\frac{4}{-3} + 180° = 126{,}87°$ $\qquad$ $z_2 = 5\,(\cos 126{,}87° + j \sin 126{,}87°)$

Die Umrechnung von der Polarform in die kartesische Form gelingt ohne Schwierigkeiten.

Beispiel: Umrechnung in die kartesische Form:
z = 13 (cos 159° + j sin 159°) = 13 (– 0,9336 + 0,3584 j) = – 12 + 5j

Die verschiedenen Schreibweisen haben beide Vor- und Nachteile. In der Polarform ist eine Addition oder Subtraktion komplexer Zahlen schlicht nicht möglich. Daher kann man auf die kartesische Form nicht verzichten. Multiplikation und Division fallen dagegen in der Polarform wesentlich einfacher aus. In der Folge werden auch Potenzen und Wurzeln relativ einfach berechenbar.

Multiplikation und Division in der Polarform

$z_1 = r_1 \cdot \cos\varphi_1 + r_1 j \cdot \sin\varphi_1$ $\qquad$ $z_2 = r_2 \cdot \cos_2 + r_2 j \cdot \sin\varphi_2$

Damit ergibt sich für das Produkt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot \cos\varphi_1 + r_1 j \cdot \sin\varphi_1)\cdot(r_2 \cdot \cos\varphi_2 + r_2 j \cdot \sin\varphi_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + j\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + j\cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Die Multiplikation erfolgt also einfach durch Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel. Entsprechend erhält man für die Division:

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= (r_1 \cdot \cos\varphi_1 + r_1 j \cdot \sin\varphi_1):(r_2 \cdot \cos\varphi_2 + r_2 j \cdot \sin\varphi_2) \\ &= r_1 : r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

Beispiel: $z_1 = 4\,e^{j\,135°}$ $\quad z_2 = 2\,e^{j\,45°}$
$z_1 \cdot z_2 = 8\,e^{j\,180°} = -8$
$z_1 : z_2 = 2\,e^{j\,90°} = 2j$
$z_2 : z_1 = 0{,}5\,e^{-j\,90°} = -0{,}5\,j$

Potenzen und Wurzeln

Für Potenzen in der Polarform gilt:

$$\begin{aligned} z^n &= [r \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n \\ &= r^n \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)^n \\ z^n &= r^n \cdot (\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

Der Beweis gelingt mit Hilfe der vollständigen Induktion. Für n = 1 ist die Aussage trivialer weise richtig. Für n = 2 ist die Behauptung ebenfalls bereits bewiesen, wenn wir auf die Multiplikation zweier gleicher Zahlen zurückgreifen. Es bleibt der Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} [r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^{n+1} &= [r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n \cdot [r(\cos\varphi + j\sin\varphi)] \\ &= r^n[\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)]\cdot[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)] \\ &= r^{n+1}\left(\cos^2(n\varphi) - \sin^2(n\varphi) + j\cos(\varphi)\sin(n\varphi) + j\sin s(n\varphi)\right) \\ &= r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + j\sin(n+1)\varphi] \end{aligned}$$

Damit gilt die Formel für alle n ∈ IN. Auch das Potenzieren mit negativen Exponenten und damit die Bildung von Bruchtermen ist möglich:

$$\begin{aligned} z^{-n} &= r^{-n} \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)^{-n} \\ &= r^{-n} \cdot \frac{1}{(\cos\varphi + j\sin\varphi)^{n}} \\ &= r^{-n} \cdot (\cos(-n\varphi) + j\sin(-n\varphi)) \end{aligned}$$

Bleibt noch die Erweiterung auf gebrochene Exponenten:

$$\begin{aligned} [r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^{\frac{p}{q}} &= r^{\frac{p}{q}}(\cos\varphi + j\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} \\ &= r^{\frac{p}{q}}(\cos p\varphi + j\sin p\varphi)^{\frac{1}{q}} \\ &= r^{\frac{p}{q}}\left[\cos\left(\frac{1}{q}qp\varphi\right) + j\sin\left(\frac{1}{q}qp\varphi\right)\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= r^{\frac{p}{q}}\left[\left(\cos\left(\frac{1}{q}p\varphi\right) + j\sin\left(\frac{1}{q}p\varphi\right)\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= r^{\frac{p}{q}}\left(\cos\left(\frac{p}{q}\varphi\right) + j\sin\left(\frac{p}{q}\varphi\right)\right) \end{aligned}$$

Die hier abgeleitete Methode zur Berechnung von Potenzen ist bekannt als *Satz von Moivre* (Abraham Moivre 1667 – 1754):

$$Satz v. Moivre: z^{\frac{p}{q}} = r^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\cos\left(\frac{p}{q}\varphi\right) + j\sin\left(\frac{p}{q}\varphi\right)\right)$$

Mit diesem Satz können wir auch Radizieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} &= r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{n}\varphi\right) + j\sin\left(\frac{1}{n}\varphi\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{n}\varphi\right) + j\sin\left(\frac{1}{n}\varphi\right)\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Radizieren

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{27 \cdot (\cos 150° + j\sin 150°)} \\ &= \sqrt[3]{27} \cdot (\cos 50° + j\sin 50°) \\ &= 3 \cdot (\cos 50° + j\sin 50°) \end{aligned}$$

Eigentlich besitzt jede komplexe Zahl drei dritte Wurzeln bzw. allgemein n n – te Wurzeln. Diese Wurzeln erhält man mit folgender Erweiterung der Formel von Moivre:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 360°}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 360°}{n}\right)\right].$$

Mit natürlichen Zahlen k und $0 \le k < n$ erhält man jetzt alle Lösungen. Für größere Werte von k wiederholen sich die Lösungen.

Beispiel: n – te Wurzeln.
Gesucht sind alle 4 – ten Wurzeln aus $z = -7 - 24j$.
$z = 25 \cdot [\cos 253{,}74° + j \sin 253{,}74°]$.
Damit erhält man:
$$z_k = \sqrt[4]{25} \cdot [\cos(63{,}435° + k \cdot 90°) + j \sin(63{,}435° + k \cdot 90°)]$$
$$z_1 = 1 + 2j\ ; \quad z_2 = -2 + j\ ; \quad z_3 = -1 - 2j\ ; \quad z_4 = 2 - j$$

Die Lösungen für k = 0 heißen Hauptwert der Wurzeln. Für positive reelle Zahlen, also komplexe Zahlen auf der positiven reellen Achse ist der Hauptwert gerade die normale reelle Wurzel.

Beispiel: Lösen quadratischer Gleichungen
$z^2 - (6 - 4j)\, z + 124 - 132\, j = 0$
Die Lösung ergibt sich mit der p – q – Formel:
$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 3 - 2j \pm \sqrt{(3 - 2j)^2 - 124 + 132j} \\ &= 3 - 2j \pm \sqrt{-119 + 120j} \\ &= 3 - 2j \pm \sqrt{169 \cdot e^{j \cdot 134{,}76}} \\ &= 3 - 2j \pm 13 \cdot e^{j \cdot 67{,}38^0} \\ &= 3 - 2j \pm (5 + 12j) \end{aligned}$$
Damit erhält man die Lösungen:
$z_1 = 8 + 10j$ und $z_2 = -2 - 14j$.

Fundamentalsatz der Algebra

Jede Gleichung n – ten Grades
$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$
mit komplexen Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ besitzt genau n komplexe Lösungen $z_1 \ldots z_n$.