

PRÜFUNG

LINEARE ALGEBRA UND LINEARE OPTIMIERUNG

NAME, VORNAME

STUDIENGANG

Matrikelnummer

Unterschrift: Student/Studentin

Aufgabe	Punkte	Erzielt
1	20	
2	20	
3	20	
4	15	
5	25	
Summe	100	

Zugelassene Hilfsmittel: - Taschenrechner **Note:**
 - Formelsammlung (Ergänzungen, ohne Beispiele) Prüfer:

Alle Lösungswege sind vollständig anzugeben!

Hinweis: Aus den Aufzeichnungen müssen die einzelnen Lösungsschritte erkennbar sein.
 Die direkte Lösung mit dem Taschenrechner ist nicht zugelassen.

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Welche der folgenden Matrizenprodukte sind erklärt (Multiplikation nicht ausführen!)?
 $A \cdot B, B \cdot A, A \cdot C, C \cdot A, B \cdot C, C \cdot B, B^T \cdot A$
- Berechnen Sie $C \cdot B^T$
- Für welche der Matrizen A, B, C kann eine Determinante bestimmt werden?
- Berechnen Sie die Determinanten für die unter c) bestimmten Matrizen!
- Wie groß ist der Rang von C ?
- Bestimmen Sie, falls möglich, A^{-1} , und berechnen Sie $A \cdot A^{-1}$!

Aufgabe 2

Ein lineares Gleichungssystem beschreibt das Produktionsprogramm eines Unternehmens:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 14 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 & = & -15 \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 & = & 18 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 & = & 29 \end{array}$$

- Lösen Sie das lineare Gleichungssystem!
- Geben Sie den Rang r und den Freiheitsgrad f des Gleichungssystems an!
- Geben Sie die allgemeine Lösung (in vektorieller Form) an!
- Ermitteln Sie zwei spezielle Lösungen des Gleichungssystems, bei denen sämtliche Komponenten positiv und ganzzahlig sind!
- Machen Sie die Probe für die beiden Lösungen aus d).

Aufgabe 3

In einem Unternehmen werden Halbprodukte (H) eines Teilbetriebes zu Endprodukten (E) verarbeitet. Der (Roh-)Materialverbrauch (R) des Teilbetriebes und der Bedarf an Halbprodukten für die Endfertigung sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

alle Angaben in Mengeinheiten ME !	Materialverbrauch des Teilbetriebes			Verbrauch an Halbprodukten bei der Endfertigung		
	R ₁	R ₂	R ₃	E ₁	E ₂	E ₃
Halbprodukt H ₁	1		1	1		
Halbprodukt H ₂	1	2		1	2	
Halbprodukt H ₃		1	3		2	1

Der Teilbetrieb stellt von den Halbprodukten die folgenden Mengen $H_1 = 20$, $H_2 = 35$ und $H_3 = 40$ zur Verfügung.

- Welche Mengen an Rohmaterial benötigt der Teilbetrieb für die Produktion der Halbprodukte, wenn er zusätzlich die Mengen 5 von R_1 , 4 von R_2 und 3 von R_3 bereithalten muss?
- Welche Mengen der Endprodukte (E_i) können produziert werden, wenn ein zusätzlicher Bedarf an den Halbprodukten in Höhe von $H_1 = 3$, $H_2 = 4$ und $H_3 = 6$ ME besteht?

Aufgabe 4

Für die Fertigung zweier Erzeugnisse Z_1 bzw. Z_2 werden pro Stück 4 bzw. 6 Stunden benötigt. Maximal stehen 60 Stunden zur Verfügung.

Es sollen höchstens 9 Erzeugnisse Z_1 und höchstens 8 Erzeugnisse Z_2 gefertigt werden.

Für welches Fertigungsprogramm ist der größte Gewinn zu erzielen, wenn der Gewinn bei Verkauf eines Erzeugnisses Z_1 10 € bzw. bei Z_2 15 € beträgt?

- Ermitteln Sie ein mathematisches Modell zur Lösung des Problems.
- Lösen Sie das Problem (graphisch oder rechnerisch).
- Geben Sie die vollständige Lösung an.

Aufgabe 5

Die folgende LO-Aufgabe ist graphisch **und** rechnerisch zu lösen:

$$Z = 4x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1 - x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Geben Sie die vollständige Lösung an!