

PRÜFUNG

LINEARE ALGEBRA UND LINEARE OPTIMIERUNG

NAME, VORNAME

STUDIENGANG

MATRIKELNUMMER

Unterschrift: Student/Studentin

Aufgabe	Punkte	Erzielt
1	20	
2	20	
3	20	
4	15	
5	25	
Summe	100	

Zugelassene Hilfsmittel: - Taschenrechner
 - Formelsammlung (Ergänzungen, ohne Beispiele) **Note:**
 Prüfer:

Alle Lösungswege sind vollständig anzugeben!

Hinweis: Aus den Aufzeichnungen müssen die einzelnen Lösungsschritte erkennbar sein.
 Die direkte Lösung mit dem Taschenrechner ist nicht zugelassen.

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Welche der folgenden Matrizenprodukte sind erklärt (Multiplikation nicht ausführen!)?

$$A \cdot B, B \cdot A, A \cdot C, C \cdot A, B \cdot C, C \cdot B, B^T \cdot A$$

b) Berechnen Sie $C \cdot B^T$ c) Für welche der Matrizen A, B, C kann eine Determinante bestimmt werden?

d) Berechnen Sie die Determinanten für die unter c) bestimmten Matrizen!

e) Wie groß ist der Rang von C ?f) Bestimmen Sie, falls möglich, A^{-1} , und berechnen Sie $A \cdot A^{-1}$!

Aufgabe 2

Ein lineares Gleichungssystem beschreibt das Produktionsprogramm eines Unternehmens:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 14 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 & = & -15 \\ 2x_1 + 2x_3 - 4x_4 & = & 18 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 & = & 29 \end{array}$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem!

b) Geben Sie den Rang r und den Freiheitsgrad f des Gleichungssystems an!

c) Geben Sie die allgemeine Lösung (in vektorieller Form) an!

d) Ermitteln Sie zwei spezielle Lösungen des Gleichungssystems, bei denen sämtliche Komponenten positiv und ganzzahlig sind!

e) Machen Sie die Probe für die beiden Lösungen aus d).

Aufgabe 3

In einem Unternehmen werden Halbprodukte (H) eines Teilbetriebes zu Endprodukten (E) verarbeitet. Der (Roh-)Materialverbrauch (R) des Teilbetriebes und der Bedarf an Halbprodukten für die Endfertigung sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

alle Angaben in Mengeneinheiten ME !	Materialverbrauch des Teilbetriebes			Verbrauch an Halbprodukten bei der Endfertigung		
	R ₁	R ₂	R ₃	E ₁	E ₂	E ₃
Halbprodukt H ₁	1		1	1		
Halbprodukt H ₂	1	2		1	2	
Halbprodukt H ₃		1	3		2	1

Der Teilbetrieb stellt von den Halbprodukten die folgenden Mengen $H_1 = 20$, $H_2 = 35$ und $H_3 = 40$ zur Verfügung.

- Welche Mengen an Rohmaterial benötigt der Teilbetrieb für die Produktion der Halbprodukte, wenn er zusätzlich die Mengen 5 von R_1 , 4 von R_2 und 3 von R_3 bereithalten muss?
- Welche Mengen der Endprodukte (E_i) können produziert werden, wenn ein zusätzlicher Bedarf an den Halbprodukten in Höhe von $H_1 = 3$, $H_2 = 4$ und $H_3 = 6$ ME besteht?

Aufgabe 4

Für die Fertigung zweier Erzeugnisse Z_1 bzw. Z_2 werden pro Stück 4 bzw. 6 Stunden benötigt. Maximal stehen 60 Stunden zur Verfügung.

Es sollen höchstens 9 Erzeugnisse Z_1 und höchstens 8 Erzeugnisse Z_2 gefertigt werden.

Für welches Fertigungsprogramm ist der größte Gewinn zu erzielen, wenn der Gewinn bei Verkauf eines Erzeugnisses Z_1 10 € bzw. bei Z_2 15 € beträgt?

- Ermitteln Sie ein mathematisches Modell zur Lösung des Problems.
- Lösen Sie das Problem (graphisch oder rechnerisch).
- Geben Sie die vollständige Lösung an.

Aufgabe 5

Die folgende LO-Aufgabe ist graphisch **und** rechnerisch zu lösen:

$$Z = 4x_1 - x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1 - x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14 \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Geben Sie die vollständige Lösung an!